DM6

Correction du devoir maison

Exercice 1 (HEC 2010 Voie E)

1. (a) X_1 suit la loi géométrique de paramètre p donc X_1 admet une espérance et une variance et on a :

$$\boxed{E(X_1) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X_1) = \frac{q}{p^2}.}$$

On a $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$[X_1 \leq k] = \bigcup_{i=1}^{k} [X_1 = i] \quad \text{donc} \quad P([X_1 \leq k]) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} [X_1 = i]\right).$$

Or, les événements $([X_1 = i])_{i \in \{1,\dots,k\}}$ sont deux à deux incompatibles donc on obtient :

$$P([X_1 \leq k]) = \sum_{i=1}^{k} P([X_1 = i]) = \sum_{i=1}^{k} p(1-p)^{i-1} = p\sum_{i=1}^{k}(1-p)^{i-1} = p\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} \boxed{= 1-(1-p)^k.}$$

(b) X_1 et X_2 admettent une espérance donc par linéarité, $X_1 + X_2$ admet une espérance et on a :

$$E(X_1+X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \boxed{= \frac{2}{p}.}$$

X_1 et X_2 admettent une variance donc $X_1 + X_2$ admet une variance. Comme de plus, X_1 et X_2 sont indépendantes, on a :

$$V(X_1+X_2) = V(X_1) + V(X_2) = \frac{q}{p^2} + \frac{q}{p^2} \boxed{= \frac{2q}{p^2}.}$$

2. (a) On a $Z(\Omega) = \{\min(i,j), (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2\} = \mathbb{N}^*$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $[Z > k] = [X_1 > k] \cap [X_2 > k]$ donc par indépendance de X_1 et X_2, on obtient :

$$\begin{aligned} P([Z > k]) &= P([X_1 > k] \cap [X_2 > k]) = P([X_1 > k]) \times P([X_2 > k]) \\ &= (1 - P([X_1 \leq k]))(1 - P([X_2 \leq k])) = (1-(1-(1-p)^k))^2 \qquad \text{d'après 1.(a)} \\ &= (1-p)^{2k}. \end{aligned}$$

Comme $[Z = k] = [Z > k-1] \setminus [Z > k]$, on obtient :

$$\begin{aligned} P([Z = k]) &= P([Z > k-1]) - P([Z > k-1] \cap [Z > k]) = P([Z > k-1]) - P([Z > k]) \\ &= (1-p)^{2(k-1)} - (1-p)^{2k} = (1-p)^{2(k-1)}(1-(1-p)^2) = (q^2)^{k-1}(1-q^2). \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{Z \text{ suit la loi géométrique de paramètre } 1-q^2}$. Par suite, Z admet une espérance et une variance et on a :

$$\boxed{E(Z) = \frac{1}{1-q^2} \qquad \text{et} \qquad V(Z) = \frac{q^2}{(1-q^2)^2}.}$$

(b) $Z + T$ est la somme de la plus grande et de la plus petite valeur prise parmi X_1 et X_2. On a donc clairement $\boxed{Z + T = X_1 + X_2}$. Ainsi, on a $T = X_1 + X_2 - Z$. Comme $X_1 + X_2$ et Z admettent une espérance, par linéarité T aussi et on a :

$$E(T) = E(X_1+X_2) - E(Z) = \frac{2}{p} - \frac{1}{1-q^2} = \frac{2}{1-q} - \frac{1}{1-q^2} = \frac{2(1+q)-1}{1-q^2} \boxed{= \frac{1+2q}{1-q^2}.}$$

(c) $[Z=k]\cup[T=k]$ est réalisé si et seulement si k est la plus petite ou la plus grande des valeurs prises par X_1 et X_2 soit si et seulement si $X_1=k$ ou $X_2=k$. D'où l'égalité des deux évènements. Notons qu'on a de même $[Z=k]\cap[T=k]=[X_1=k]\cap[X_2=k]$.

On a $P([Z=k]\cup[T=k])=P([T=k])+P([Z=k])-P([T=k]\cap[Z=k])$, donc on obtient :

$$\begin{aligned}P([T=k])&=P([Z=k]\cup[T=k])-P([Z=k])+P([T=k]\cap[Z=k])\\&=P([X_1=k]\cup[X_2=k])-P([Z=k])+P([X_1=k]\cap[X_2=k])\\&=P([X_1=k])+P([X_2=k])-P([X_1=k]\cap[X_2=k])-P([Z=k])+P([X_1=k]\cap[X_2=k])\\&\boxed{=2P([X_1=k])-P([Z=k])}\quad\text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ont la même loi.}\end{aligned}$$

(d) On a $T=X_1+X_2-Z$. Or, X_1+X_2 et Z admettent une variance donc T admet une variance ou de manière équivalente un moment d'ordre 2.
Par la formule d'Huygens, on a $V(T)=E(T^2)-(E(T))^2$.

- On a $T(\Omega)=\{\max(i,j),(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2\}=\mathbb{N}^*$.
- Calculons $E(T^2)$. On sait que T^2 admet un moment d'ordre deux, donc la série $\sum_{k\geq 1}k^2P([T=k])$ converge (absolument) et on a :

$$E(T^2)=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2P([T=k]).$$

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a $k^2P([T=k])=2k^2P([X_1=k])-k^2P([Z=k])$. Par le théorème du transfert, comme X_1 et Z admettent un moment d'ordre 2, les séries $\sum_{k\geq 1}k^2P([X_1=k])$ et $\sum_{k\geq 1}k^2P([Z=k])$ convergent et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}k^2P([X_1=k])=E(X_1^2)=V(X_1)+(E(X_1))^2=\frac{q}{p^2}+\left(\frac{1}{p}\right)^2=\frac{q+1}{p^2}=\frac{1+q}{(1-q)^2},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}k^2P([Z=k])=E(Z^2)=V(Z)+(E(Z))^2=\frac{q^2}{(1-q^2)^2}+\left(\frac{1}{1-q^2}\right)^2=\frac{1+q^2}{(1-q^2)^2}.$$

Par linéarité de la somme des séries convergentes, on obtient alors :

$$\begin{aligned}E(T^2)&=2\sum_{k=1}^{+\infty}k^2P([X_1=k])-\sum_{k=1}^{+\infty}k^2P([Z=k])=2\frac{1+q}{(1-q)^2}-\frac{1+q^2}{(1-q^2)^2}\\&=\frac{2(1+q)(1+q)^2}{(1-q^2)^2}-\frac{1+q^2}{(1-q^2)^2}=\frac{2(1+2q+q^2+q+2q^2+q^3)-1-q^2}{(1-q^2)^2}\\&=\frac{2q^3+5q^2+6q+1}{(1-q^2)^2}.\end{aligned}$$

- $E(T)^2=\left(\frac{1+2q}{1-q^2}\right)^2$ d'après la question 2.(b).

Par la formule de Huygens, on en déduit :

$$\begin{aligned}V(T)=E(T^2)-(E(T))^2&=\frac{2q^3+5q^2+6q+1}{(1-q^2)^2}-\left(\frac{1+2q}{1-q^2}\right)^2\\&=\frac{2q^3+5q^2+6q+1-(1+4q+4q^2)}{(1-q^2)^2}=\frac{2q^3+q^2+2q}{(1-q^2)^2}\\&\boxed{=\frac{q(2q^2+q+2)}{(1-q^2)^2}}.\end{aligned}$$

3. (a) On a $Z+T = X_1+X_2$ donc $Z+T$ a une variance et $V(Z+T) = V(X_1+X_2) \boxed{= \frac{2q}{p^2}}$ d'après 1.(b). Par ailleurs, comme Z et T admettent une variance, on a

$$V(Z+T) = V(Z) + V(T) + 2\mathrm{Cov}(Z,T)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Z,T) &= \frac{1}{2}\left(V(Z+T) - V(Z) - V(T)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2q}{p^2} - \frac{q^2}{(1-q^2)^2} - \frac{q(2q^2+q+2)}{(1-q^2)^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2q(1+q)^2 - q^2 - q(2q^2+q+2)}{(1-q^2)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2q^2}{(1-q^2)^2}\right) = \frac{q^2}{(1-q^2)^2}\boxed{= V(Z).}\end{aligned}$$

Les variables aléatoires $\boxed{Z \text{ et } T \text{ ne sont pas indépendantes}}$ car $\mathrm{Cov}(Z,T) \neq 0$.

(b) On a

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\mathrm{Cov}(Z,T)}{\sqrt{V(Z)}\sqrt{V(T)}} = \frac{V(Z)}{\sqrt{V(Z)}\sqrt{V(T)}} = \sqrt{\frac{V(Z)}{V(T)}}\\ &= \sqrt{\frac{q^2}{(1-q^2)^2} \times \frac{(1-q^2)^2}{q(2q^2+q+2)}}\boxed{= \sqrt{\frac{q}{2q^2+q+2}}.}\end{aligned}$$

Exercice 2 (EDHEC 2004)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}}$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$ comme composée et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc l'intégrale $f(x)$ est généralisée en $+\infty$.

   En $+\infty$, on a :

   - $$\frac{1}{1+t+t^{x+1}} \underset{+\infty}{\sim} \begin{cases} \dfrac{1}{t} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2t} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{t^{x+1}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
   - $\dfrac{1}{1+t+t^{x+1}} \geq 0$ pour tout $t \geq 1$;
   - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}}$ converge si et seulement si $x > 0$, et diverge donc si $x = 0$ (intégrale de Riemann en $+\infty$).

   Par théorème de comparaison, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{x+1}}$ converge si et seulement si $x > 0$.

   Ainsi $\boxed{\text{le domaine de définition de la fonction } f \text{ est bien }]0, +\infty[}$.

2. Soit $0 < x \leq y$. Pour tout $t \geq 1$, on a $1+t+t^x \leq 1+t+t^y$, et donc $\dfrac{1}{1+t+t^x} \geq \dfrac{1}{1+t+t^y}$. En prenant l'intégrale sur $[1, +\infty[$ (tout converge), on obtient par croissance de l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^x} \geq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^y}$$

   et donc $f(x) \geq f(y)$. La fonction $\boxed{f \text{ est donc décroissante sur }]0, +\infty[}$.

3. (a) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto t(1+t^x)$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc l'intégrale est généralisée en $+\infty$.
En $+\infty$, on a :
   - $\dfrac{1}{t(1+t^x)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+1}}$;
   - $\dfrac{1}{t^{x+1}} \geq 0$ pour tout $t \geq 1$;
   - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{dt}}{t^{x+1}}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = x+1 > 1$.

   Par théorème de comparaison on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{dt}}{t(1+t^x)}$ converge pour tout $x > 0$, et donc que la quantité $\boxed{g(x) \text{ existe bien pour } x > 0}$.

   (b) Soit $x \in]0, +\infty[$. On a pour tout $t \in [1, +\infty[$:
$$\frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x} = \frac{1+t^x-t^x}{t(1+t^x)} \boxed{= \frac{1}{t(1+t^x)}.}$$
Soit $y > 1$, on a donc :
$$\begin{aligned}
\int_1^y \frac{1}{t(1+t^x)}\,\mathrm{dt} &= \int_1^y \frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x}\,\mathrm{dt} \\
&= \int_1^y \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} - \int_1^y \frac{t^{x-1}}{1+t^x}\,\mathrm{dt} \\
&= [\ln(t)]_1^y - \left[\frac{1}{x}\ln(1+t^x)\right]_1^y \\
&= \ln(y) - \ln(1) + \frac{\ln(1+1^x)}{x} - \frac{1}{x}\ln(1+y^x) \\
&= \frac{1}{x}\ln\left(\frac{y^x}{1+y^x}\right) + \frac{\ln(2)}{x} = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{1+y^{-x}}\right) + \frac{\ln(2)}{x}
\end{aligned}$$
Or $y^{-x} = e^{-x\ln(y)} \to 0$ lorsque $y \to +\infty$. Donc on a $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{1+y^{-x}}\right) + \frac{\ln(2)}{x} = \frac{\ln(2)}{x}$.
On retrouve donc que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^x)}\,\mathrm{dt}$ converge, et on a :
$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^x)}\,\mathrm{dt} = \frac{\ln(2)}{x}.}$$

   (c) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}}$ est positive sur $[1, +\infty[$, son intégrale sur $[1, +\infty[$ (qui converge si $x > 0$) est donc positive. D'où $f(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$.
Soit $x > 0$. On a d'autre part, pour tout $t \geq 1$:
$$\frac{1}{1+t+t^{x+1}} \leq \frac{1}{t+t^{x+1}} = \frac{1}{t(1+t^x)}$$
On prend alors l'intégrale entre 1 et $+\infty$ de cette inégalité (tout converge). Par croissance de l'intégrale, on obtient :
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{dt}}{1+t+t^{x+1}} \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{dt}}{t+t^{x+1}} = \frac{1}{t(1+t^x)}.$$
Finalement on a $f(x) \leq g(x) = \dfrac{\ln(2)}{x}$.

On peut donc conclure que pour tout $x > 0$, on a :

$$\boxed{0 \leq f(x) \leq \frac{\ln 2}{x}.}$$

Enfin, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(2)}{x} = 0$. Par théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \text{ existe et vaut } 0}$.

4. (a) On a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(2)}{x} - f(x) = g(x) - f(x) &= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t + t^{x+1}} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + t^{x+1}} \\ &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t + t^{x+1}} - \frac{1}{1 + t + t^{x+1}} \right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or on a pour tout $t \geq 1$, $\frac{1}{t + t^{x+1}} - \frac{1}{1 + t + t^{x+1}} \geq 0$. Par positivité de l'intégrale (tout converge), on obtient :

$$\frac{\ln(2)}{x} - f(x) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t + t^{x+1}} - \frac{1}{1 + t + t^{x+1}} \right) \mathrm{d}t \geq 0.$$

De plus on a pour tout $t \geq 1$,

$$\frac{1}{t + t^{x+1}} - \frac{1}{1 + t + t^{x+1}} = \frac{1 + t + t^{x+1} - t - t^{x+1}}{(t + t^{x+1})(1 + t + t^{x+1})} = \frac{1}{(t + t^{x+1})(1 + t + t^{x+1})} \leq \frac{1}{t^{2x+2}}$$

Pour tout $y > 1$, on obtient par croissance de l'intégrale que :

$$\int_1^y \frac{\mathrm{d}t}{t + t^{x+1}} - \int_1^y \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + t^{x+1}} \leq \int_1^y \frac{\mathrm{d}t}{t^{2x+2}} = \left[-\frac{1}{2x+1} \frac{1}{t^{2x+1}} \right]_1^y = \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+1} \frac{1}{y^{2x+1}}.$$

En faisant tendre y vers $+\infty$ dans cette inégalité (les intégrales convergent car $f(x)$ et $g(x)$ existent, et $\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{y^{2x+1}} = 0$), on en déduit donc que :

$$\boxed{\frac{\ln(2)}{x} - f(x) \leq \frac{1}{2x+1}.}$$

(b) On multiplie les inégalités obtenues à la question précédente par $x > 0$:

$$0 \leq \ln(2) - xf(x) \leq \frac{x}{2x+1}$$

On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{2x+1} = 0$. Par théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln(2) - xf(x))$ existe et vaut 0. Ainsi on peut conclure qu'au voisinage de 0^+, on a :

$$xf(x) = \ln(2) + o(1) \quad \text{soit encore} \quad f(x) = \frac{\ln(2)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi on obtient que $\boxed{f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{\ln(2)}{x}}$, et en particulier que $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty}$.

5. On obtient le tableau de variation suivant pour f.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0