DM6

Devoir maison à rendre le 12/11/2019

Exercice 1

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, et $\text{Cov}(X, Y)$ la covariance de deux variables aléatoires X et Y.

Soit p un réel de $]0,1[$. On pose $q = 1 - p$. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p.

On pose : $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

1. (a) Rappeler la valeur de $E(X_1)$ et $V(X_1)$ et déterminer $P([X_1 \leq k])$ pour tout k de $X_1(\Omega)$.
   (b) Calculer $E(X_1 + X_2)$ et $V(X_1 + X_2)$.
2. (a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$. En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.
   (b) Justifier que $Z + T = X_1 + X_2$ et en déduire $E(T)$.
   (c) Soit k un entier de $\mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité : $[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]$.
   En déduire la relation suivante : $P([T = k]) = 2P([X_1 = k]) - P([Z = k])$.
   (d) Établir la formule : $V(T) = \dfrac{q\left(2q^2 + q + 2\right)}{(1 - q^2)^2}$.
3. (a) Déterminer $V(Z + T)$ puis $\text{Cov}(Z, T)$.
   Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?
   (b) Calculer en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.

Exercice 2

1. On pose, lorsque c'est possible, $\quad f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + t^{x+1}}$.

   Montrer que le domaine de définition de la fonction f est $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est décroissante sur $]0, +\infty[$.
3. (a) Justifier l'existence de la quantité $g(x)$ définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1 + t^x)}$.
   (b) Pour tout x de $]0, +\infty[$ et pour tout t de $[1, +\infty[$, simplifier $\dfrac{1}{t} - \dfrac{t^{x-1}}{1 + t^x}$, puis établir que :
   $\forall x \in]0, +\infty[, \quad g(x) = \dfrac{\ln 2}{x}$.
   (c) En déduire que : $\quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad 0 \leq f(x) \leq \dfrac{\ln 2}{x}$, puis déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
4. (a) Montrer que : $\quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad 0 \leq \dfrac{\ln 2}{x} - f(x) \leq \dfrac{1}{2x + 1}$.
   (b) En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ ainsi qu'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0^+. *Indication : on pourra commencer par déterminer la limite de $xf(x)$.*
5. Dresser le tableau de variation de f.
