DM7

Devoir maison à rendre le 18/11/2019

Les parties I, II et III de ce devoir sont obligatoires pour le groupe de Maths C. Vous pouvez travailler par groupe de deux étudiants, et me rendre une copie par groupe. Ce devoir est facultatif pour le groupe de Maths D.

Le problème comporte quatre parties.

On pose : $E_0 = \{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \text{bornée sur } \mathbb{R}\}$; si $f \in E_0$, on notera $N_0(f) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

Partie I - Construction de la fonction arctan.

On définit, sous réserve d'existence, la fonction arctan : $x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

1. Vérifier que la fonction arctan est bien définie sur $\mathbb{R}$, impaire, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et préciser une expression de $\dfrac{d}{dx}(\arctan)$.
2. Montrer que arctan admet une limite finie, notée provisoirement L, en $+\infty$ et justifier que arctan est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-L, L[$.
3. Pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, calculer $\arctan[\tan(x)]$, et en déduire la valeur de L.
4. Justifier que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x-y|$.
5. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

Si $f \in E_0$, on définit, sous réserve d'existence, $\Phi(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(tx)\frac{f(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
L'objectif du problème est d'obtenir quelques propriétés de $\Phi(f)$ et de Φ.

Partie II - Premières propriétés de $\Phi(f)$ et de Φ.

6. Vérifier que E_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
7. Soit $f \in E_0$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(tx)\frac{f(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
8. Soit $f \in E_0$. Montrer que $\Phi(f)$ est bornée et $N_0[\Phi(f)] \leq \dfrac{\pi^2}{4}N_0(f)$.
9. Continuité de $\Phi(f)$ pour $f \in E_0$.
   Dans cette question, f désigne un élément de E_0 et x un réel.
   (a) Soit A un réel strictement positif et $h \in \mathbb{R}^*$. Vérifier que :
   $$|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)| \leq N_0(f)\left(\int_0^A \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2}\mathrm{d}t\right)$$
   (b) En déduire que, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, pour tout $A > 0$,
   $$|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)| \leq N_0(f)\left(|h|\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t + \pi\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right).$$
   (c) Soit $h \in \mathbb{R}^*$, en choisissant $A = \dfrac{1}{|h|}$, établir que :
   $$|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)| \leq |h|\frac{N_0(f)}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) + \pi N_0(f)\arctan|h|.$$
   (d) Montrer alors que $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   (e) En déduire que $\Phi : f \in E_0 \mapsto \Phi(f)$ est un endomorphisme de E_0.

Partie III - Étude d'un exemple.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
g est l'image par Φ de l'application constante égale à 1 : $x \in \mathbb{R} \mapsto 1$.

10. Vérifier que g est impaire.

11. Dérivabilité de g sur $]0, +\infty[$. Soit x un réel strictement positif.

    (a) Vérifier que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\arctan''(u)| \leq \dfrac{1}{1+u^2}$.

    (b) Soit a et b deux réels distincts, et I le segment d'extrémités a et b. Montrer que :
$$\left|\arctan b - \arctan a - \frac{b-a}{1+a^2}\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \max_{u \in I}\left(\frac{1}{1+u^2}\right).$$

    (c) Soit $h \in \left]-\dfrac{x}{2}, \dfrac{x}{2}\right[$ et t un réel positif. Établir :
$$\left|\arctan[t(x+h)] - \arctan(tx) - \frac{th}{1+t^2x^2}\right| \leq \frac{t^2h^2}{2} \frac{1}{1+\dfrac{t^2x^2}{4}}.$$

    (d) Montrer alors que, pour tout $h \in \left]-\dfrac{x}{2}, \dfrac{x}{2}\right[$,
$$\left|g(x+h) - g(x) - h\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2x^2}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t\right| \leq 2h^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{4+t^2x^2}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

    (e) En déduire que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et justifier que, pour tout $x > 0$:
$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2x^2}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

    (f) g est-elle dérivable sur $]-\infty, 0[$? Si oui, que vaut $g'(x)$ pour $x < 0$?

12. Calcul de $g'(x)$ pour $x > 0$.

    (a) Déterminer $g'(1)$.

    (b) Pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, chercher des expressions $A(x)$ et $B(x)$, indépendantes de t, telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} = A(x)\frac{t}{1+t^2x^2} + B(x)\frac{t}{1+t^2}.$$

    (c) En déduire que, pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$.

    (d) g est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$?

13. Une nouvelle expression de $g(x)$ pour $x > 0$.

    (a) Justifier, pour tout $x > 0$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\mathrm{d}t$.

    (b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t$.

14. Étude de la limite de g en $+\infty$.

    (a) Démontrer que, pour tout $x > 0$, $g(x) = \dfrac{\pi^2}{4} - \displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

(b) Écrire, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

et montrer alors que :

$$\left|\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{1}{t}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{\sqrt{x}}.$$

(c) Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

15. Application au calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

(a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1-t^2}\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur à l'aide des questions précédentes.

(b) Vérifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1-t^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}\mathrm{d}t$.

Indication. On pourra, en le justifiant, utiliser le changement de variables $u = \dfrac{1}{t}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 t^{2k}\ln(t)\mathrm{d}t + \int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}\mathrm{d}t$$

(on justifiera l'existence des intégrales introduites).

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 t^{2n}\ln t\mathrm{d}t$.

(e) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}\mathrm{d}t = 0$.

(f) Donner alors la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$. En déduire celle de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Partie IV - Retour à l'étude de Φ.

16. Montrer que $\displaystyle\sup_{f\in E_0\setminus\{0\}}\frac{N_0[\Phi(f)]}{N_0(f)} = \frac{\pi^2}{4}$.

Dans toute la suite du problème, on considère :

- $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| < \dfrac{4}{\pi^2}$, on pourra poser $\gamma = \dfrac{\pi^2}{4}|\lambda|$.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi^n = \underbrace{\Phi\circ\cdots\circ\Phi}_{n\text{ fois}}$, autrement dit $\Phi^0 = \mathrm{id}_{E_0}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi^{n+1} = \Phi\circ\Phi^n$.
- $f \in E_0\setminus\{0\}$, on posera $M = N_0(f)$.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n = \lambda^n\Phi^n(f)$.

17. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+1} = \lambda\Phi(\varphi_n)$ et $N_0(\varphi_{n+1}) \leq \gamma N_0(\varphi_n)$.

18. Peut-on avoir $\lambda\Phi(f) = f$? Que peut-on alors dire de $\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi$?

19. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_0(\varphi_n) \leq \gamma^n M$ et que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} N_0(\varphi_n)$ converge.

20. Montrer alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\varphi_n(x)$ converge.

On note alors $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x)$.

20. Montrer que φ est bornée sur $\mathbb{R}$.

21. Continuité de φ.

    (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,

$$|\varphi_{n+1}(x+h) - \varphi_{n+1}(x)| \leq |\lambda| N_0(\varphi_n) \left[\frac{|h|}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) + \pi \arctan |h| \right].$$

    (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leq |\lambda| \left(\sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n) \right) \left[\frac{|h|}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) + \pi \arctan |h| \right] + |f(x+h) - f(x)|.$$

    (c) Justifier que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

22. Application aux valeurs spectrales de Φ.

    (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $(\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi) \left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k \right)$ et montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} N_0 \left[(\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi) \left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k \right) - f \right] = 0.$$

    (b) Montrer alors que $(\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)(\varphi) = f$. Que peut-on dire de $\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi$?

    (c) Soit $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que $\Phi - \mu\mathrm{id}_{E_0}$ ne soit pas bijective, montrer que $|\mu| \leq \dfrac{\pi^2}{4}$.