DM8

Correction du devoir maison

Exercice 1 (Ecricome 2014)

1. On montre que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$:

   - la fonction nulle $f : x \mapsto 0 = x \times 0 + x\ln(x) \times 0$ appartient bien à E (en prenant $P = Q = 0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$;
   - Pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, pour tout $f_1, f_2 \in E$, il existe $(P_1, P_2, Q_1, Q_2) \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^4$ tels que :

   $$f_1 : x \mapsto xP_1(x) + x\ln(x)Q_1(x) \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto xP_2(x) + x\ln(x)Q_2(x).$$

   D'où pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

   $$\begin{aligned}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) &= \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = \lambda_1(xP_1(x) + x\ln(x)Q_1(x)) + \lambda_2(xP_2(x) + x\ln(x)Q_2(x)) \\ &= x\underbrace{(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)}_{\in \mathbb{R}_{n-1}[X]}(x) + \lambda_2 x\ln(x)\underbrace{(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2)}_{\in \mathbb{R}_{n-1}[X]}(x)\end{aligned}$$

   Donc on a bien $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in E$.

   E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. $\boxed{E \text{ donc en particulier un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$

   Montrons que $E = \text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ par double inclusion.

   $\subset$ Soit $f \in E$. Il existe $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que :

   $$f : x \mapsto xP(x) + x\ln(x)Q(x).$$

   Écrivons $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$ et $Q = b_0 + b_1X + \cdots + b_{n-1}X^{n-1}$. On obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

   $$\begin{aligned} f(x) &= x(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) + x\ln(x)(b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}) \\ &= a_0x + a_1x^2 + \cdots + a_{n-1}x^n + b_0x\ln(x) + b_1x^2\ln(x) + \cdots + b_{n-1}x^n\ln(x) \\ &= a_0u_1(x) + a_1u_2(x) + \cdots + a_{n-1}u_n(x) + b_0v_1(x) + b_1v_2(x) + \cdots + b_{n-1}v_n(x). \end{aligned}$$

   Ainsi on a bien $f = a_0u_1 + a_1u_2 + \cdots + a_{n-1}u_n + b_0v_1 + b_1v_2 + \cdots + b_{n-1}v_n \in \text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$. D'où la première inclusion.

   $\supset$ Pour tout $i = 1, \dots n$, on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad u_i(x) = x^i = x \times x^{i-1} + x\ln(x) \times 0 \in E,$$

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad v_i(x) = x^i\ln(x) = x \times 0 + x\ln(x) \times x^{i-1} \in E,$$

   car 0 et X^{i-1} appartiennent à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a donc $u_i, v_i \in E$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Comme de plus E est un espace vectoriel, on obtient que :

   $$\text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \subset E.$$

   On peut donc conclure que $\boxed{E = \text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n).}$

2. Pour tout $f \in E$, il existe $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que :

   $$f : x \mapsto xP(x) + x\ln(x)Q(x).$$

   Or on a $\lim_{x \mapsto 0^+} xP(x) = 0$ et $\lim_{x \mapsto 0^+} x\ln(x)Q(x) = 0$ par croissances comparées. D'où par somme, on en déduit que $\lim_{x \mapsto 0^+} f(x) = 0$. La $\boxed{\text{fonction } f \text{ peut donc être prolongée par continuité en } 0}$ en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $\mathbb{R}_+$ et telle que $\tilde{f}(0) = 0$.

   On en déduit en particulier que pour tout $f \in E$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est bien définie pour tout $x > 0$. En effet, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0. Cette intégrale est donc faussement impropre en 0, donc convergente. Ainsi l'intégrale définissant $\varphi(f)$ est bien convergente.

Pour tout $k = 1, \dots, n$, pour tout $x > 0$, on a :

$$\varphi(u_k)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x u_k(t)\mathrm{dt} = \frac{1}{x}\int_0^x t^k \mathrm{dt} = \frac{1}{x}\frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{x^k}{k+1} = \frac{1}{k+1}u_k(x).$$

Ainsi on a $\boxed{\varphi(u_k) = \frac{1}{k+1}u_k}$.

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\frac{1}{x}\int_\varepsilon^x v_k(t)\mathrm{dt} = \frac{1}{x}\int_\varepsilon^x t^k \ln(t)\mathrm{dt}$$

On procède à une intégration par parties :

$$\begin{array}{c|ccc} + & \ln(t) & & t^k \\ & & \searrow & \\ - & \dfrac{1}{t} & \overset{\int}{\longleftarrow} & \dfrac{t^{k+1}}{k+1} \end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto \ln(t)$ et $t \mapsto \dfrac{t^{k+1}}{k+1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\varepsilon, x]$. On en déduit par intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\int_\varepsilon^x v_k(t)\mathrm{dt} &= \frac{1}{x}\left(\left[\ln(t)\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_\varepsilon^x - \int_\varepsilon^x \frac{t^k}{k+1}\mathrm{dt}\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(\ln(x)\frac{x^{k+1}}{k+1} - \ln(\varepsilon)\frac{\varepsilon^{k+1}}{k+1} - \frac{x^k}{(k+1)^2} + \frac{\varepsilon^k}{(k+1)^2}\right) \\
&\underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{x}\left(\ln(x)\frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{x^k}{(k+1)^2}\right)
\end{aligned}$$

par croissances comparées. On peut donc conclure que :

$$\boxed{\varphi(v_k) = \frac{1}{k+1}v_k - \frac{1}{(k+1)^2}u_k.}$$

3. Pour tout $f, g \in E$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, pour tout $x > 0$ on a :

$$\varphi(\lambda f + \mu g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda f + \mu g)(t)\mathrm{dt} = \lambda\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{dt} + \mu\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\mathrm{dt}$$

par linéarité de l'intégrale (toutes les intégrales en jeu convergent). On en déduit que :

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g).$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est bien linéaire.}}$

Enfin, on a vu que pour tout $k = 1, \dots, n$, $\varphi(u_k)$ et $\varphi(v_k)$ appartiennent bien à E. Pour tout $f \in E = \mathrm{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$, il existe $\lambda_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$ tels que :

$$f = \sum_{k=1}^n (\alpha u_k + \beta v_k).$$

On en déduit par linéarité de φ que :

$$\varphi(f) = \sum_{k=1}^n (\alpha\varphi(u_k) + \beta\varphi(v_k)) \in E$$

car E est un espace vectoriel. Ainsi $\boxed{\varphi(f) \text{ appartient bien à } E.}$

4. On a obtenu $\varphi(u_k) = \dfrac{1}{k+1}u_k$ et $\varphi(v_k) = \dfrac{1}{k+1}v_k - \dfrac{1}{(k+1)^2}u_k$ pour tout $k = 1, \dots, n$. On peut donc compléter la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$:

$$\boxed{A = M_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{3} & \frac{-1}{9} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{1}{3} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \frac{1}{n+1} & \frac{-1}{(n+1)^2} \\ 0 & & \cdots & & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}}.$$

5. A étant triangulaire supérieure, les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux. On a donc :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(\varphi) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+1}\right\}}.$$

0 n'est pas valeur propre de φ, donc φ est un endomorphisme injectif de E qui est de dimension finie égale à $2n$. Donc $\boxed{\varphi \text{ est bijectif}}$.

6. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda = \dfrac{1}{k+1}$, et soit f un vecteur propre associé à λ. On pose donc :

$$g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^{-1/\lambda} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x^{-k-1} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Montrons que g est constante. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par le théorème fondamental de l'analyse. Donc g l'est aussi, de sorte qu'on peut calculer sa dérivée pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (-k-1)x^{(-k-1)+1} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + x^{-k-1} f(x) \\ &= (-k-1)x^{-k-1}\varphi(f)(x) + x^{-k-1}f(x) = (-k-1)x^{-k-1}\lambda f(x) + x^{-k-1}f(x) \\ &= (-k-1)x^{-k-1}\frac{1}{k+1}f(x) + x^{k+1}f(x) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{g \text{ est une fonction constante sur } \mathbb{R}_+^*}$. Notons $c \in \mathbb{R}$ cette constante. On en déduit que pour tout $x > 0$:

$$x^{-k-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = c \quad \Rightarrow \quad \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \boxed{= cx^{k+1}.}$$

On obtient alors en dérivant (on a déjà justifié que tout était dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$) :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad f(x) = (k+1)cx^k.}$$

7. Pour $\lambda = \dfrac{1}{k+1}$, on a donc montré que si $f \in E_{\frac{1}{k+1}}(\varphi)$, alors il existe un scalaire $d \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda u_k$. Réciproquement, on a vu que u_k appartient bien à $E_{\frac{1}{k+1}}(\varphi)$. On peut donc conclure que :

$$\boxed{E_{\frac{1}{k+1}}(\varphi) = \mathrm{Vect}(u_k).}$$

Puisque $u_k \neq 0_E$, on obtient donc que $\boxed{\dim(E_{\frac{1}{k+1}}(\varphi)) = 1}$ pour tout $k = 1, \dots, n$.

On a enfin que :

$$\sum_{k=1}^{n} \dim(E_{\frac{1}{k+1}}(\varphi)) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n < 2n = \dim(E).$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ n'est pas un endomorphisme diagonalisable.}}$

Exercice 2 (Edhec 2015)

1. (a) On a $X(\Omega) = \mathbb{R}$, et donc $Y = |X| \geq 0$, de sorte que $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$. On en déduit que pour tout $x < 0$, on a $F_Y(x) = P(|X| \leq x) = 0$ car $[|X| \leq x]$ est l'évènement impossible.

   Soit à présent $x \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x) \\ &= P(X \leq x) - P(X < -x) = P(X \leq x) - P(X \leq -x) \text{ car } X \text{ à densité} \\ &= \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1. \end{aligned}$$

   On obtient donc :

$$\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} 2\Phi(x) - 1 \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$$

   On sait que la fonction Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que F_Y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. On étudie la continuité en 0 (on rappelle de $\Phi(0) = 1/2$) :

$$\lim_{x \to 0^-} F_Y(x) = 0 = 2\Phi(0) - 1 = F_Y(0) = \lim_{x \to 0^+} F_Y(x).$$

   Donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

   On a donc montré que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, donc $\boxed{Y \text{ est une variable à densité.}}$

   Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$F_Y'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 2\Phi'(x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

   Ainsi une densité de Y est (en fixant la valeur en 0 arbitrairement) :

$$\boxed{f_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ si } x > 0 \end{cases}}$$

   (b) Y admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ converge absolument, c'est-à-dire si et seulement si elle converge puisque la fonction intégrée est positive.

   La fonction $t \mapsto te^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $[0, +\infty[$, et on a pour tout $A > 0$:

$$\int_0^A te^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^A = 1 - e^{-\frac{A^2}{2}}$$

   Puisque $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} 1 - e^{-\frac{A^2}{2}} = 1$, on en déduit que l'intégrale converge, et qu'elle vaut 1.

   Ainsi $\boxed{E(Y) \text{ existe bien}}$, et elle vaut $\boxed{E(Y) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}.}$

   (c) Y admet une variance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Y(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ converge absolument, soit si et seulement si cette intégrale converge puisque la fonction intégrée est positive. Soit $A > 0$. On effectue une intégration par partie **sur le segment** $[0, A]$.

$$\begin{array}{c|ccc} + & t & & te^{-\frac{t^2}{2}} \\ & & \searrow & \\ - & 1 & \xleftarrow{\int} & -e^{-\frac{t^2}{2}} \end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto -e^{-\frac{t^2}{2}}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$. On obtient :

$$\int_0^A t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \left[-te^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^A + \int_0^A e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = -Ae^{-\frac{A^2}{2}} + \int_0^A e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{A \to +\infty} -Ae^{-\frac{A^2}{2}} = 0$. D'autre part, on sait que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi} \qquad \text{(densité de la loi normale).}$$

Comme la fonction $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est paire, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$ converge et vaut $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. On peut donc conclure que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$ converge et vaut $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Ainsi $E(Y^2)$ existe et vaut 1. Donc $\boxed{V(Y) \text{ existe bien}}$ et vaut :

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 \boxed{= 1 - \frac{2}{\pi}}$$

Remarque. Autre méthode, en remarquant que $Y^2 = X^2$, on sait que $E(X^2)$ existe (loi normale) et on a donc :

$$E(Y^2) = E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1 + 0 = 1.$$

2. (a) La fonction $\varphi(t) = \sqrt{2t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et strictement croissante car la fonction racine carrée l'est. Donc $\boxed{\text{le changement de variable est licite}}$. De plus on a :

$$u = \sqrt{2t} \Rightarrow t = \frac{u^2}{2} \quad \mathrm{d}u = \frac{dt}{\sqrt{2t}}$$

et lorsque $t : 0 \to +\infty$, on a $u : 0 \to +\infty$. On en déduit donc que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}} \mathrm{d}t$ est de même nature que $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u$. Or cette intégrale est convergente puisque c'est une intégrale de Gauss sur $[0, +\infty[$. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ converge également et on a :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u.}$$

(b) On a :

- $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- g est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, comme composée et quotient de fonctions continues qui ne s'annulent pas ;
- On a vu que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(u)\mathrm{d}u = 1$$

Ainsi $\boxed{g \text{ est bien une densité de probabilité.}}$

3. (a) La variable T est bien définie car $Z \geq 0$ presque surement (puisque $P(Z < 0) = \int_{-\infty}^0 g(t)\mathrm{d}t = 0$). De plus, on a $T(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Donc pour tout $x < 0$, on a :

$$F_T(x) = P(T \leq x) = P(\sqrt{2Z} \leq x) = 0.$$

Supposons que $x \geq 0$, on a :

$$F_T(x) = P(\sqrt{2Z} \leq x) = P(2Z \leq x^2) = P\left(Z \leq \frac{x^2}{2}\right) = G(x^2/2)$$

On obtient donc que $\boxed{F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ G(x^2/2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$.

On admet que T est une variable à densité (on pourrait le montrer...). De plus g est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, donc G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur ces intervalles. Il en est donc de même de F_T par composition, et on a pour tout $x \neq 0$:

$$F_T'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xG'(x^2/2) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Une densité possible de T est donc (en fixant arbitrairement la valeur en 0)

$$\boxed{f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ xg(x^2/2) = x\sqrt{\dfrac{2}{\pi x^2}}e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}}.$$

On note donc que $\boxed{T \text{ et } Y \text{ ont la même densité, et donc suivent la même loi.}}$

(b) Comme Y possède une variance, on en déduit que T possède aussi une variance, et donc que $T^2 = 2Z$ admet une espérance. Ainsi $\boxed{Z = \frac{T^2}{2} \text{ admet une espérance}}$ qui vaut :

$$E(Z) = E\left(\frac{T^2}{2}\right) = \frac{1}{2}E(T^2) = \frac{1}{2}E(Y^2) \boxed{= 1.}$$

4. On a $Z = \dfrac{T^2}{2}$ et T suit la même loi que $|X|$, donc T^2 suit la même loi que X^2 où $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$. Pour simuler la variable Z, on commence donc par simuler une loi $\mathscr{N}(0,1)$ à l'aide de la commande `grand(1,1,"nor",0,1)`.

```
X = grand(1,1,"nor",0,1)
Z = (X^2)/2
```