DM8

Devoir maison à rendre le 02/12/2019

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe deux polynômes P, Q appartenant à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = xP(x) + x\ln(x)Q(x).$$

Pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, on pose :

$$u_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad v_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \ln(x) \end{array} \right.$$

Pour toute fonction f appartenant à E, on note $\varphi(f)$ la fonction féfinie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \varphi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

et on note φ l'application qui à $f \in E$ associe $\varphi(f)$.

1. Prouver que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $E = \text{Vect}(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$ (*c'est-à-dire que E est l'espace vectoriel engendré par les fonctions $u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n$*).

$$\boxed{\text{On admettra que la famille } \mathcal{B} = (u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n) \text{ est une base de } E.}$$

2. Justifier que chaque fonction f de E se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, calculer $\varphi(u_k)$ et $\varphi(v_k)$.
3. Démontrer que φ est linéaire. En dénduire que $\varphi(f) \in E$ lorsque $f \in E$.
4. Écrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
5. L'endomorphisme φ est-il bijectif ? Quelles sont ses valeurs propres ?
6. Soit $f \in E$ un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ. On suppose que λ est non nul et on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g(x) = x^{-1/\lambda}\int_0^x f(t)\, dt.$$

Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. En dénduire l'expression de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ puis celle de f.

7. Pour chaque valeur propre λ de φ, déterminer la dimension de l'espace propre de φ associé à la valeur propre λ.

(Cube) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée réduite (espérance nulle et variance égale à 1) et on note Φ la fonction de répartition de X.

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note F_Y sa fonction de répartition.

1. (a) Exprimer, pour tout réel x positif, $F_Y(x)$ à l'aide de $\Phi(x)$. En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y.
   (b) Montrer que Y admet une espérance et donner sa valeur.
   (c) Montrer que Y admet une variance et donner sa valeur.

2. On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi\, x}} \;\text{ si } x > 0 \;\text{ et }\; g(x) = 0 \;\text{ si } x \leq 0.$$

   (a) Vérifier, en justifiant que l'on peut procéder au changement de variable $u = \sqrt{2t}$, que :

$$\int_0^{+\infty} g(t)\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\, du$$

   (b) En déduire que g peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire Z de densité g, et on note G sa fonction de répartition.

3. (a) On pose $T = \sqrt{2Z}$. On admet que T est une variable aléatoire à densité. Exprimer la fonction de répartition F_T de T en fonction de G, puis en déduire une densité f_T de T et vérifier que T suit la même loi que Y.
   (b) En déduire que Z possède une espérance et donner sa valeur.

4. On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'nor',m,s)` simule une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(m, s^2)$.

   Écrire une (ou des) commande(s) `Scilab` utilisant `grand` et permettant de simuler la variable aléatoire Z.
