DM9

Correction du devoir maison

Exercice 1 (Ecricome 2020)

1. (a) $\boxed{\text{La série de Riemann } \sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$

   (b) Soit $k \geq 2$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $t \geq k$, d'où, puisque $\alpha > 0$, $\frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$.
   Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^\alpha}(k+1-k) = \frac{1}{k^\alpha}.$$

   De même, pour $t \in [k-1, k]$ on a $t \leq k$, d'où, puisque $\alpha > 0$, $\frac{1}{t^\alpha} \geq \frac{1}{k^\alpha}$. Par croissance de l'intégrale on obtient :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \geq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^\alpha}.$$

   Finalement, on a bien :

$$\boxed{\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.}$$

   (c) Soit $1 \leq n < N$ des entiers. Sommons les inégalités de la questions précédente pour $k = n+1, \dots, N$. On obtient (à l'aide de la relation de Chasles pour les intégrales) :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_n^N \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

   Puisque $\alpha > 1$, on a :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1}\right]_{n+1}^{N+1} = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

   De même, $\lim_{N\to+\infty} \int_n^N \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$. En faisant tendre N vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient donc :

$$\boxed{\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.}$$

   (d) D'après la relation précédente, on a, pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{n^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \frac{R_{1,n}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} \leq 1.$$

   Or, on a $\frac{n^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha-1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \frac{R_{1,n}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}$ existe et vaut 1. Ce qui se réécrit : $\boxed{R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}$

   (e) Par définition, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge à l'ordre 2 si et seulement si $\sum_{n\geq 1} R_{1,n}$ converge. Or on a :

   - $R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
   - $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ puisque $\alpha > 1$.

- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ est une série de Riemann qui converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, soit $\alpha > 2$.

D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la $\sum_{n\geq 1} R_{1,n}$ converge si et seulement si $\alpha > 2$. Ainsi $\boxed{\sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge à l'ordre 2 si et seulement si } \alpha > 2.}$

(f) On a vu que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge à l'ordre 1 si et seulement si $\alpha > 1$, et qu'elle converge à l'ordre 2 si et seulement si $\alpha > 2$.
On peut conjecturer que $\boxed{\sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge à l'ordre } p \in \mathbb{N}^* \text{ si et seulement si } \alpha > p.}$

2. (a) Pour $n \geq 2$ on a $n^n \geq n^2$ et donc :

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Par théorème de comparaison, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge.}}$

(b) Pour tout $k \geq 3$, on a $k^k \geq 3^k$ (en élevant l'inégalité à la puissance k) et ainsi :

$$\boxed{\forall k \geq 3, \qquad 0 \leq u_k \leq \frac{1}{3^k}.}$$

Par la question précédente, $\sum u_k$ converge, et il en est de même de la série géométrique $\sum \frac{1}{3^k}$ (de raison $q = \frac{1}{3} \in]-1,1[$). En sommant les inégalités obtenues, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k}.$$

Or on a :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \underbrace{\frac{1}{3^{n+1}}}_{1^{er} \text{ terme}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^{n+1}}\frac{3}{2} = \frac{1}{2\times 3^n}.$$

Ainsi, on a :

$$\boxed{0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2\cdot 3^n}.}$$

(c) $\sum \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}$ est convergente en tant que série géométrique (multipliée par une constante) de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$. Par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 1} R_{1,n}$ converge. En d'autres termes $\boxed{\sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge à l'ordre 2.}}$

En sommant les inégalités de la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{3^k}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} = R_{2,n}$ et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{4\cdot 3^n}$ par le calcul effectué à la question précédente.
Ainsi, on a :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad 0 \leq R_{2,n} \leq \frac{1}{4\cdot 3^n}.}$$

(d) On va procéder par récurrence sur p. Notons pour cela $\mathcal{A}(p)$ l'assertion « la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge à l'ordre p et, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq R_{p,n} \leq \dfrac{1}{2^p\cdot 3^n}$ ».

Init. On a déjà montré que l'assertion est vraie pour $p = 1$ et $p = 2$ aux questions précédentes.

Hér. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on suppose que l'assertion $\mathcal{A}(p)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p\cdot 3^n}.$$

$\displaystyle\sum \frac{1}{2^p}\frac{1}{3^n}$ est convergente en tant que série géométrique (multipliée par une constante) de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$. Par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} R_{p,n}$ converge. En d'autres termes la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge à l'ordre $p+1$.

De plus en sommant les inégalités, on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p}\frac{1}{3^k}.$$

Or $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} = R_{p+1,n}$ et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{2^p}\frac{1}{2.3^n} = \frac{1}{2^{p+1}3^n}$. On obtient donc :

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq R_{p+1,n} \leq \frac{1}{2^{p+1}3^n}.$$

Ce qui prouve l'assertion au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Par principe de récurrence, on a donc montré que $\boxed{\text{pour tout } p \geq 1, \displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge à l'ordre } p \text{ et}}$

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad 0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p\cdot 3^n}.}$$

(e) D'après la question précédente on a pour tout $n \geq 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq R_{n,n} \leq \frac{1}{2^n 3^n} = \frac{1}{6^n}.$$

$\displaystyle\sum \frac{1}{6^n}$ est convergente en tant que série géométrique de raison $\frac{1}{6} \in]-1,1[$. Par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 1} R_{n,n} \text{ converge.}}$

3. (a) Pour $t \in [0,1]$ on a $1+t \geq 1$, ce qui donne :

$$0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq \frac{t^n}{1} = t^n.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes implique que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \text{ existe et vaut } 0.}$

(b) Commençons par noter que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}.$$

Soit à présent $N \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} &= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^n\,\mathrm{d}t \qquad \text{par lin. de l'int.} \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&\boxed{= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

(c) D'après la question 3.(a), la suite $\left(\int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. D'après la question 3.(b), on en déduit que la suite $\left(\sum\limits_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$. En d'autres termes, $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ converge}}$ (et sa somme vaut $\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(2)$).

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k &= \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \left(\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&\boxed{= \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

(d) Pour $p \geq 1$, on définit l'assertion $\mathcal{A}(p)$: « la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_p$ converge à l'ordre p et, pour tout $n \geq 0$, $R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\,\mathrm{d}t$ ». Montrons par récurrence que $\mathcal{A}(p)$ est vraie pour tout $p \geq 1$.

Init. La question précédente nous assure que l'assertion $\mathcal{A}(1)$ est vérifiée.

Hér. Soit $p \geq 1$, on suppose que l'assertion $\mathcal{A}(p)$ est vérifiée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} R_{p,k} &\overset{HR}{=} \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \frac{(-1)^{k+p}}{1+t)^p}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-t)^{k+p}}{(1+t)^p}\,\mathrm{d}t \quad \text{par lin. de l'int.}\\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p} \sum_{k=0}^{n} (-t)^k\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p} \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}} - \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t\\
&\overset{(*)}{=} \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+p} \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on a $1+t \geq 1$, d'où $(1+t)^p \geq 1$ et donc :

$$0 \leq \frac{t^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}} \leq \frac{t^{n+1+p}}{1} = t^{n+1+p}.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{n+1+p}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+p+2}.$$

Le théorème des gendarmes nous assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 0. En reprenant alors l'égalité $(*)$ ci-dessus, on obtient que la série de terme général $R_{p,k}$ converge et que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} R_{p,k} = \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t.$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
R_{p+1,n} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} R_{p,k} - \sum_{k=0}^{n} R_{p,k}\\
&= \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t - \left(\int_0^1 \frac{(-t)^p}{1+t)^p+1}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t \right)\\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge à l'ordre $p+1$ et que, pour tout $n \geq 0$, $R_{p+1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t$. D'où l'assertion $\mathcal{A}(p+1)$.

Par principe de récurrence, on en conclut alors que :

$$\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}^*, \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge à l'ordre } p \text{ et, pour tout } n \geq 0,\ R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t.}$$

Exercice 2 (Edhec 2013)

1. Comme $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M) = 2 = 3 - 1$, $\mathrm{Im}(f)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &\overset{\text{cours}}{=} \mathrm{Vect}(f((0,0,1), f(0,1,0), f(0,0,1)) = \mathrm{Vect}((0,0,0),(1,0,0),(2,3,0))\\ &= \mathrm{Vect}((1,0,0),(2,3,0)).\end{aligned}$$

Or on a $f((1,0,0)) = (0,0,0) \in \mathrm{Im}(f)$ et $f((2,3,0)) = (3,0,0) \in \mathrm{Im}(f)$. Par le cours, $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f.

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Im}(f) \text{ est un hyperplan de } \mathbb{R}^2 \text{ stable par } f.}$

Remarque. En fait, $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f pour n'importe quel endomorphisme f puisque pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$, $f(y)$ est bien dans $\mathrm{Im}(f)$ par définition de l'image d'un endomorphisme.

2. (a) On peut ici déterminer les valeurs propres à vue :
   - La somme des coefficients sur chaque ligne de M valant 4, on a :
   $$f((1,1,1)) = (4,4,4) = 4(1,1,1).$$
   Donc 4 est une valeur propre de f et on a $\dim E_4(f) \geq 1$.
   - $\mathrm{rg}(M - I_3) = 1 < 3$, donc 1 est une valeur propre de f, et par le théorème du rang $\dim E_1(f) = 3 - 1 = 2$.

   En ajoutant à cela le fait que les sous-espaces sont en somme directe, on en déduit que :
   $$1 + 2 \leq \dim E_4(f) + \dim E_1(f) \leq 3.$$
   Ainsi, il n'y a pas d'autre valeur propre pour f, de sorte que $\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{1,4\}}$.

   Remarque. On pouvait en dire plus :
   - $\dim E_4(f) + \dim E_1(f) = 3$, de sorte que f est diagonalisable,
   - $\dim E_4(f) = 1$, et comme $(1,1,1) \in E_4(f)$, on a $E_4(f) = \mathrm{Vect}((1,1,1))$.

   (b) $\mathrm{Ker}(f - Id) = E_1(f)$ est de dimension $2 = 3-1$, et $\mathrm{Ker}(f - Id)$ est stable par f, comme tout sous-espace propre de f (c'est du cours). Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(f - Id) \text{ est un hyperplan de } \mathbb{R}^3 \text{ stable par } f.}$

3. (a) Commençons par un rappel.

   > **Rappel. Expression matriciel du produit scalaire dans une B.O.N.**
   > Comme $\mathscr{B}$ est une base **orthonormale** de E, on rappelle que :
   > $$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle x, y\rangle = {}^tXY$$
   > avec $X = M_{\mathscr{B}}(x) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = M_{\mathscr{B}}(y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   Soit $(x,y) \in E^2$, et notons $X = M_{\mathscr{B}}(x) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = M_{\mathscr{B}}(y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $M = M_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a $M_{\mathscr{B}}(f(x)) = MX$ et $M_{\mathscr{B}}(f^*(y)) = {}^tMY$, de sorte que :
   $$\langle f(x), y\rangle = {}^t(MX)Y = {}^tX\,{}^tMY = {}^tX({}^tMY)\boxed{= \langle x, f^*(y)\rangle.}$$

   (b) Soit g un endomorphisme de E vérifiant aussi la propriété précédente. Montrons que $g = f$.

   Méthode 1. Elle se base sur le point de cours suivant :

Rappel. Coordonnées d'un vecteur dans une B.O.N.
Puisque $\mathscr{B}$ est une base **orthonormale** de E, on a :

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

Ici on obtient pour tout x de E :

$$f^*(x) - g(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle f^*(x), e_k \rangle e_k - \sum_{k=1}^{n} \langle g(x), e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^{n} \langle x, f(e_k) \rangle e_k - \sum_{k=1}^{n} \langle x, f(e_k) \rangle e_k = 0.$$

Donc on a bien $f^* = g$.

Méthode 2. Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\langle x, f^*(y) - g(y) \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle - \langle x, g(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle - \langle f(x), y \rangle = 0$$

Donc $f^*(y) - g(y)$ est orthogonal à tout vecteur de E. Il est donc en particulier orthogonal à lui-même (raisonnement fait en cours) et on a pour tout $y \in E$ (et pour $x = f^*(y) - g(y)$) :

$$\|f^*(y) - g(y)\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f^*(y) = g(y).$$

Ainsi on a bien $f^* = g$.

Ainsi, $\boxed{f^* \text{ est l'unique endomorphisme de } E \text{ vérifiant } \forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.}$

Remarque. f^* s'appelle *l'endomorphisme adjoint* de f, notion hors programme mais qu'on retrouve dans plusieurs sujets de concours.

4. (a) Toujours en notant M la matrice représentant f dans $\mathscr{B}$, on a :

$$\lambda \in \mathrm{Spec}(f) \Rightarrow \mathrm{rg}(M - \lambda I_n) < n \Rightarrow \mathrm{rg}(\,{}^t(M - \lambda I_n)) < n \Rightarrow \mathrm{rg}(\,{}^tM - \lambda I_n) < n$$
$$\Rightarrow \mathrm{rg}(f^* - \lambda id) < n \Rightarrow \lambda \in \mathrm{Spec}(f^*).$$

Puisqu'ici, λ est valeur propre de f, $\boxed{\lambda \text{ est donc aussi une valeur propre de } f^*.}$

(b) i. φ est bien linéaire par linéarité à gauche du produit scalaire et à valeurs dans $\mathbb{R}$. C'est donc bien une forme linéaire sur E. De plus on a :

$$\varphi(u) = \langle u, u \rangle = \|u\|^2 \neq 0$$

car $u \neq 0_E$ puisque c'est un vecteur propre. $\boxed{\varphi \text{ est bien une forme linéaire non nulle sur } E.}$

ii. $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$ puisque φ est non nulle. Ainsi, on a $1 \leq \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \leq \dim(\mathbb{R}) = 1$, de sorte que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$. Par le théorème du rang, on en déduit que :

$$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n - 1.$$

Donc $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E.

Montrons que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est stable par f. Soit pour cela $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Montrons que $f(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(\varphi)$. On a :

$$\varphi(f(x)) = \langle f(x), u \rangle = \langle x, f^*(u) \rangle = \langle x, \lambda \cdot u \rangle = \lambda \langle x, u \rangle = \lambda \varphi(x) = 0.$$

Ainsi on a bien que $f(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) \text{ est un hyperplan de } E \text{ stable par } f.}$

Remarque. On aurait pu utiliser directement dans cette question que le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan (c'est du cours). On l'a redémontré ici. On peut à ce sujet consulter le **Complément de cours 2. Formes linéaires et hyperplans.**

Problème (Ecricome 2015)

Partie A

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$[Y_n > x] = \bigcap_{1 \leq i \leq n} [X_i > x].$$
Par indépendance des (X_i), on a :
$$\begin{aligned} P(Y_n > x) &= P\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} [X_i > x]\right) = \prod_{1 \leq i \leq n} P(X_i > x) = \prod_{1 \leq i \leq n} (1 - P(X_i \leq x)) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (1 - F(x)) = (1 - F(x))^n . \end{aligned}$$
Ainsi, on a :
$$F_n(x) = P(Y_n \leq x) = 1 - P(Y_n > x) \boxed{= 1 - (1 - F(x))^n .}$$

2. Si X admet une densité f, alors sa fonction de répartition F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points, et continue sur $\mathbb{R}$. Par théorème d'opérations sur les applications $\mathscr{C}^1$ et continues, il en est de même pour :
$$F_n : x \mapsto 1 - (1 - F(x))^n.$$
Donc Y_n est à densité. De plus, pour tout x où F est dérivable, on a :
$$F_n'(x) = nF'(x)\,(1 - F(x))^{n-1} = nf(x)\,(1 - F(x))^{n-1} .$$
Donc une densité de Y_n est donnée par :
$$\boxed{f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto nf(x)\,(1 - F(x))^{n-1}.}$$

3. (a) Soit $x \geq 0$. Procédons à une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^x (1 - \Phi(t))\,\mathrm{d}t$.
$$\begin{array}{c|ccc} + & \boxed{1 - \Phi(t)} & & 1 \\ & & \searrow & \\ - & -\Phi'(t) = -\varphi(t) & \overset{\int}{\leftarrow} & \boxed{t} \end{array}$$
Les fonctions encadrées étant $\mathscr{C}^1$, l'intégration par partie est licite, et on a :
$$\int_0^x (1 - \Phi(t))\,\mathrm{d}t = [t(1 - \Phi(t))]_0^x + \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t = x(1 - \Phi(x)) + \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$
D'où le résultat :
$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (1 - \Phi(t))\,\mathrm{d}t - x(1 - \Phi(x)).}$$

(b) Pour tout $x \geq 0$, on a :

$$0 \leq x(1-\Phi(x)) = x\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} x\varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $E(V)$ existe, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est le reste de l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$, donc on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} t\varphi(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Par théorème des gendarmes, la limite $\boxed{\lim_{x\to+\infty} x(1-\Phi(x)) \text{ existe et vaut } 0.}$

De $\displaystyle\int_0^x (1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t + x(1-\Phi(x))$, il découle alors que :

$$\int_0^x (1-\Phi(t))\ \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} E(V).$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}(1-\Phi(t))\mathrm{d}t \text{ converge (et vaut } E(V)).}$$

(c) Supposons que $\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t$ converge. Pour tout $x \geq 0$, on a $-x(1-\Phi(x)) \leq 0$ de sorte que :

$$0 \leq \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t \overset{3.(a)}{=} \int_0^x (1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t - x(1-\Phi(x)) \leq \int_0^x (1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty}(1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t$$

car $1-\Phi(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t$ est croissante (car $t \mapsto t\varphi(t)$ est positive), et majorée par les inégalités ci-dessus. Elle admet donc une limite finie lorsque $x \to +\infty$. Ainsi,

$$\boxed{E(V) \text{ existe (et vaut } \int_0^{+\infty}(1-\Phi(t))\ \mathrm{d}t \text{ d'après (b)).}}$$

(d) En 3.(b), nous avons démontré une implication et en 3.(c) l'implication réciproque. On peut donc conclure que :

$$\boxed{E(V) \text{ existe si, et seulement si } \int_0^{+\infty}(1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

Et on a dans ce cas $\boxed{E(V) = \displaystyle\int_0^{+\infty}(1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t.}$

Pour aller plus loin.

Une propriété analogue peut être démontrée pour une variable V discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. Voir à ce sujet l'Exercice 5.7 de TD.

Partie B

4. (a) Notons que f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et positive si α est positif... ce que nous ne manquerons pas de vérifier. Montrons que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \alpha\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge. La

fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc I est une intégrale généralisée en $+\infty$. Et pour $A > 0$, on a :

$$\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t = [\alpha \arctan(t)]_0^A = \alpha \arctan(A).$$

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} \arctan(A) = \dfrac{\pi}{2}$, I converge, et vaut 1 si, et seulement si, $\alpha = \dfrac{2}{\pi}$. Et cette valeur est bien positive. Ainsi on prendra $\boxed{\alpha = \dfrac{2}{\pi}.}$

(b) Pour tout $x < 0$, on a $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^x 0\,\mathrm{d}t = 0$. Pour $x \geq 0$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{2}{\pi}\arctan(x)$$

par le calcul précédent. Ainsi, on a :

$$\boxed{F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{2}{\pi}\arctan(x) & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(c) Par les questions 1. et 2., on sait que Y_2 est à densité et on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \left(1 - \dfrac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^2 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{4}{\pi(1+x^2)}\left(1 - \dfrac{2}{\pi}\arctan(x)\right) & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(d) Soit $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Comme arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto 1/x$ est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, g est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par composition. De plus, on a pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(\frac{-1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Donc g est constante sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, égale à $g(1) = 2\arctan(1) = 2 \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$. D'où l'égalité :

$$\boxed{\forall x \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.}$$

(e) Il découle de 4.(d) que pour tout $x > 0$:

$$\frac{2}{\pi}\arctan(x) = 1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

et donc que :

$$f_2(x) = \frac{8}{\pi^2(1+x^2)}\arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

On a $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\arctan(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$. D'où l'équivalent :

$$\boxed{f_2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{8}{\pi^2 x^3}.}$$

(f) $E(Y_2)$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xf_2(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge car la fonction intégrée est positive. Comme $x \mapsto xf_2(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale est généralisée en $+\infty$. On a :

- $xf_2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{8}{\pi^2 x^2}$.
- $\dfrac{8}{\pi^2 x^2} \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge (intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = 2 > 1$).

Par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf_2(x)\,\mathrm{d}x$ converge, et donc que Y_2 admet une espérance.

D'autre part, on a $xf(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\pi x}$. Par un raisonnement analogue, où cette fois l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge, on montre que X n'a pas d'espérance. Par définition, on a donc que :

$$\boxed{X \text{ est implosive et son indice d'implosion est 2.}}$$

5. (a) Soit $N \in \mathbb{N}$. Par un télescopage immédiat, on a :

$$\sum_{k=0}^{N} P(X=k) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{N+2}} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1.$$

Ainsi on a bien :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1.}$$

(b) Commençons par chercher un équivalent de $P(X=k)$ en $+\infty$.

$$P(X=k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(1 - \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(1 - \sqrt{\frac{k+2-1}{k+2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{k+2}}\right).$$

Comme $(1+u)^\alpha - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \alpha u$, on a $\sqrt{1 + \dfrac{-1}{k+2}} - 1 \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2} \times \dfrac{-1}{k+2} \underset{k\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2k}$. On en déduit que :

$$P(X=k) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2k\sqrt{k}}.$$

Il s'ensuit que $kP(X=k) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$. Par la règle des équivalents pour les séries à termes **positifs**, $\displaystyle\sum_{k\geq 1} kP(X=k)$ est de même nature que $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2\sqrt{k}}$, qui est une série de Riemann divergente ($\alpha = 1/2 < 1$). Ainsi, $\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

(c) Comme en 5.(a), toujours par télescopage, on a pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{i+1}} - \frac{1}{\sqrt{i+2}} \boxed{= 1 - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.}$$

(d) On a $Y_2(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par 1., on a :

$$P(Y_2 \leq k) = 1 - (1 - F(k))^2 = 1 - \frac{1}{k+2},$$

formule également valable pour $k = -1$.

Comme $[Y_2 \leq k] = [Y_2 = k] \cup [Y_2 \leq k-1]$ avec incompatibilité des événements $[Y_2 = k]$ et $[Y_2 \leq k-1]$, on a :

$$P(Y_2 = k) = P(Y_2 \leq k) - P(Y_2 \leq k-1) = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Ainsi on a : $\boxed{Y_2(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ P(Y_2 = k) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}.}$

Par conséquent, $kP(Y_2 = k) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k}$, et par le critère des équivalents pour les séries à terme général **positif**, puisque $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ est une série de Riemann divergente, $\sum_{k\geq 0} kP(Y_2 = k)$ diverge. Ainsi, $\boxed{Y_2 \text{ n'a pas d'espérance.}}$

(e) On a $Y_3(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par 1., on a :

$$P(Y_3 \leq k) = 1 - (1 - F(k))^3 = 1 - \frac{1}{(k+2)^{3/2}},$$

formule aussi valable pour $k = -1$. On en déduit que :

$$P(Y_3 = k) = P(Y_3 \leq k) - P(Y_3 \leq k-1) = \frac{1}{(k+1)^{3/2}} - \frac{1}{(k+2)^{3/2}}.$$

Ainsi on a : $\boxed{Y_3(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ P(Y_3 = k) = \frac{1}{(k+1)^{3/2}} - \frac{1}{(k+2)^{3/2}}.}$

On a $P(Y_3 = k) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2k^{5/2}}$, par un raisonnement analogue à 5.(b) (dont je vous laisse le soin d'écrire les détails). Par conséquent, on a $kP(Y_2 = k) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2k^{3/2}}$, et par le critère des équivalents pour les séries à terme général **positif**, puisque $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente, la série $\sum_{k\geq 0} kP(Y_3 = k)$ converge. Ainsi $\boxed{Y_3 \text{ admet une espérance.}}$

(f) Les trois résultats précédents montrent que : $\boxed{X \text{ est implosive, d'indice d'implosion } 3.}$

Partie C

6. (a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 1, et est positive à condition que a soit positif. Montrons que l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = a\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ converge et calculons sa valeur. La fonction intégrée étant continue sur $[1, +\infty[$, l'intégrale est généralisée en $+\infty$. Soit $A \geq 1$. On a :

$$\int_1^A f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{a}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right]_1^A = \frac{a}{\alpha-1} - \frac{a}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{a}{\alpha-1} \text{ car } \alpha - 1 > 0.$$

En prenant $\boxed{a = \alpha - 1}$, f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, positive sur $\mathbb{R}$ et d'intégrale sur $\mathbb{R}$ valant 1. C'est donc une densité de probabilité.

(b) En reprenant le calcul précédent, on a : $\boxed{F : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}} & \text{sinon.} \end{cases}}$

(c) Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ se réduit à l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}}\,\mathrm{d}x$, on a directement que $\boxed{E(X) \text{ existe si, et seulement si, } \alpha > 2.}$

(d) Par 1., une densité f_n de Y_n est donnée par :

$$f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto nf(x)(1-F(x))^{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{na}{x^\alpha}\dfrac{1}{(x^{\alpha-1})^{n-1}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

$E(Y_n)$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{na}{(x^{\alpha-1})^n}\,\mathrm{d}x$ converge (absolument), la fonction intégrée étant positive. On reconnait ici une intégrale de Riemann en $+\infty$ qui converge si et seulement si $n(\alpha-1) > 1$, soit $\alpha > 1 + \dfrac{1}{n}$. Ainsi,

$$\boxed{E(Y_n) \text{ existe si, et seulement si, } \alpha > 1 + \frac{1}{n}.}$$

(e) Pour que X soit implosive d'indice $m \geq 2$ donné, il faut et suffit que $1+\dfrac{1}{m} < \alpha \leq 1+\dfrac{1}{m-1}$. $\alpha = 1 + \dfrac{1}{m-1}$ convient (par exemple).

Ainsi, pour tout $m \geq 2$, $\boxed{\alpha = 1 + \dfrac{1}{m-1} \text{ donne une variable } X \text{ implosive d'ordre } m.}$

Partie D

7. (a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 2, et est positive à condition que a le soit. Montrons que $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = a\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)^2}$ converge et calculons sa valeur. La fonction intégrée étant continue sur $[2, +\infty[$, l'intégrale est généralisée en $+\infty$. Soit $A \geq 2$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^2}$ (du type $\dfrac{u'}{u^2}$) sur $[2\,;\,+\infty[$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{\ln(x)}$. Donc on a :

$$\int_{-\infty}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-a}{\ln(A)} + \frac{a}{\ln(2)} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{a}{\ln(2)}.$$

Alors avec $\boxed{a = \ln(2)} \geq 0$, I converge et vaut 1, de sorte que f est une densité de probabilité.

(b) Par le calcul précédent, on a : $\boxed{F : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ 1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(x)} & \text{sinon.} \end{cases}}$

(c) X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \frac{\ln(2)}{\ln(x)^2}\,\mathrm{d}x$ converge (absolument), la fonction intégrée étant positive. On a pour tout $x \geq 2$:

$$\frac{1/x}{xf(x)} = \frac{\ln(x)^2}{x\ln(2)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

de sorte que $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(xf(x)\right)$. Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge, le critère de négligeabilité pour ces fonctions **positives** assure la divergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$. Ainsi $\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

(d) D'après la question 1., une densité de Y_n est donnée, pour $x \geq 2$, par :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n\dfrac{\ln(2)}{x\ln^2(x)}\left(\dfrac{\ln(2)}{\ln(x)}\right)^{n-1} & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} n\dfrac{\ln^n(2)}{x\ln^{n+1}(x)} & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a $\dfrac{1/x}{xf_n(x)} = \dfrac{\ln^{n+1}(x)}{xn\ln^n(2)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, ce qui s'écrit également $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(xf_n(x)\right)$. On conclut comme dans la question précédente que $\boxed{\text{pour tout } n \geq 2,\ Y_n \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

(e) X est une variable positive ($X(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$) sans espérance et pour laquelle aucune des variables Y_n n'a d'espérance. $\boxed{X \text{ n'est pas implosive.}}$

Partie E

8. On note F_Y la fonction de répartition de Y, et F celle de X. Par 1., on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n .$$

Ainsi on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_Y(x) = 1 - (1 - F(x))^n \Leftrightarrow (1 - F(x))^n = 1 - F_Y(x) \Leftrightarrow 1 - F(x) = (1 - F_Y(x))^{1/n}$$

On peut conclure que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = 1 - (1 - F_Y(x))^{1/n}.}$

9. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $1 - F_Y(k) = P(Y > k) = (1 - p)^k$ car il s'agit de la probabilité d'obtenir que des échecs sur les k premières expériences de Bernoulli (on pouvait aussi calculer cette probabilité à l'aide d'une somme).

S'il existe une variable X implosant sur Y à l'ordre m, on aurait (en notant toujours F la fonction de répartition de X) :

$$F(k) = 1 - (1 - p)^{k/m} = 1 - \left[(1 - p)^{1/m}\right]^k .$$

Cette formule est de plus valable pour $k = 0$. On obtient alors que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = k) = F(k)-F(k-1) = \left[(1 - p)^{1/m}\right]^{k-1}-\left[(1 - p)^{1/m}\right]^k = \left[(1 - p)^{1/m}\right]^{k-1}(1-(1-p)^{1/m}).$$

Donc X suit la loi géométrique de paramètre $1 - (1 - p)^{1/m}$. Mais X n'est alors pas implosive, car elle possède une espérance. Ainsi, $\boxed{\text{il n'existe pas de variable } X \text{ implosant sur } Y.}$

10. Soit $\alpha = 1 + \dfrac{1}{m - 1}$, X de loi décrite dans la partie C, Y de même loi que Y_m. Alors par les résultats de la partie C, $\boxed{X \text{ implose sur } Y \text{ avec un indice d'implosion } m.}$

11. Par hypothèse et d'après 1., on a (avec F la fonction de répartition de X) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = 1 - (1 - F(x))^m .$$

Fixons $2 \leq k \leq m$. Construisons une variable aléatoire X' implosive, d'indice d'implosion k, qui implose sur Y.

Étape 1. Définition de la loi de X'.

Posons H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H(x) = 1 - (1 - F(x))^{m/k} .$$

On vérifie que H est une fonction de répartition d'une variable à densité :

- H est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en un nombre fini de points car F l'est.
- H est de limite nulle en $-\infty$ et de limite 1 en $+\infty$.
- F étant croissante, $1-F$ est décroissante, donc $(1-F)^{m/k}$ aussi, et du coup H est croissante.

Soit X' une variable aléatoire admettant pour fonction de répartition H.

Étape 2. X' implose sur Y, d'indice d'implosion k.

Pour tout $1 \leq i \leq k$, on note Y'_i la variable $\min(X'_1, \ldots, X'_i)$ où $X'_1, \ldots, X'_k$ sont de même loi que X' et indépendantes.

- On a par la question 1. que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{Y'_k}(x) = 1 - (1 - H(x))^k = 1 - (1 - F(x))^m = G(x).$$

  Donc Y'_k suit la même loi que Y.
- Puisque X implose sur Y, Y possède une espérance. Il en est donc de même de Y'_k.
- Soit $1 \leq i < k$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{Y'_i}(x) = 1 - (1 - H(x))^i = 1 - (1 - F(x))^{mi/k} \quad \Rightarrow \quad 1 - F_{Y'_i}(x) = (1 - F(x))^{mi/k}.$$

  Or on a $\dfrac{mi}{k} \leq m\dfrac{k-1}{k} \leq m - \dfrac{m}{k} \leq m - 1$ (puisque $\dfrac{m}{k} \geq 1$). Et comme $0 \leq 1 - F(x) \leq 1$, on a :

$$1 - F_{Y'_i}(x) \geq (1 - F(x))^{m-1} \geq 0.$$

  Utilisons les résultats de la question 3. Puisque $E(Y_{m-1})$ n'existe pas (car X est d'indice d'implosion m), $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F(x))^{m-1}\,\mathrm{d}x$ diverge. Par théorème de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1 - F_{Y'_i}(x)\,\mathrm{d}x$ diverge également. Ainsi, toujours par la question 3., $E(Y'_i)$ n'a pas d'espérance.
- En particulier pour $i = 1$, $Y'_1 = X'$ n'a pas d'espérance.

Ainsi X' est implosive, implose sur Y, avec un indice d'implosion valant k. On a donc montré que :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in [\![2, m]\!], \text{ il existe } X' \text{ implosant sur } Y, \text{ d'indice } k.}$$