DM9

Devoir maison à rendre le 03/01/2022

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n\geq 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $(R_{2,n})_{n\geq 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geq 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n\geq 0}$ la suite des restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}$$

On peut noter pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{0,n} = u_n$.
Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

   (a) Rappeler la condition nécessaire est suffisante sous laquelle $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

   On se place désormais sous cette condition.

   (b) Pour tout entier $k \geq 2$, justifier que :
   $$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

   (c) En déduire que pour tout $n \geq 1$:
   $$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

   (d) En déduire que :
   $$R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

   (e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?

   (f) Conjecturer à quel ordre la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

2. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^n}$.

   (a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

(b) Montrer que, pour tout $k \geq 3, u_k \leq \dfrac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geq 2$:

$$0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2.3^n}.$$

(c) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge à l'ordre 2 , et que, pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq R_{2,n} \leq \frac{1}{4.3^n}.$$

(d) Montrer que, pour tout $p \geq 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}.$$

(e) La série $\sum\limits_{n\geq 1} R_{n,n}$ converge-t-elle ?

3. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

(a) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}$. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t$, montrer que :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

(c) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge et que, pour tout $n \geq 0$:

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

(d) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geq 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geq 0$:

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par E un espace vectoriel de dimension n et on rappelle qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

Pour finir, on désigne par Id l'endomorphisme identité de E.

1. Étude d'un premier exemple ($n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$).

   On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{Im}f$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est stable par f.

2. Étude d'un deuxième exemple ($n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$).

   On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer les valeurs propres de f.

   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - Id)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est stable par f.

   On suppose dans la suite que E est un espace euclidien de dimension n, et on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.

   Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.

   On considère un endomorphisme f de E qui possède au moins une valeur propre λ réelle et on se propose de démontrer qu'il existe un hyperplan de E stable par f.

3. On note f^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la transposée de la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

   (a) Vérifier que l'on a : $\forall (x, y) \in E \times E, \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.

   (b) Établir que f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant :

   $$\forall (x, y) \in E \times E, \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle.$$

4. (a) Montrer que λ est valeur propre de f^*.

   (b) On considère un vecteur propre u de f^* associé à la valeur propre λ, et on pose φ : $\begin{cases} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle x, u\rangle \end{cases}$.

      i. Montrer que φ est une forme linéaire non nulle sur E.

      ii. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E qui est stable par f.

Problème

Les variables aléatoires introduites dans ce problème sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Dans tout le problème, on considère X une variable aléatoire à valeurs positives, et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi que X.

On note pour tout entier $n \geq 2$, $Y_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$, autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y_n(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

On dit que la loi de X est **implosive** si X n'admet pas d'espérance et s'il existe un entier $m \geq 2$ tel que Y_m admet une espérance.

Si la loi de X est implosive, on appelle **indice d'implosion de** X le plus petit entier $m \geq 2$ tel que Y_m admet une espérance.

On notera F la fonction de répartition de X et F_n la fonction de répartition de Y_n pour tout entier $n \geq 2$.

Dans le cas où X (respectivement Y_n) admet une densité, on la notera f (resp. f_n).

Partie A - Résultats préliminaires

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, la fonction de répartition de Y_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n .$$

2. On suppose dans cette question que X admet une densité f. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, Y_n admet une densité f_n et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = nf(x)\,(1 - F(x))^{n-1} .$$

3. On souhaite prouver dans cette question que pour une variable aléatoire positive V admettant une densité φ continue sur $\mathbb{R}_+$ et dont on note la fonction de répartition Φ, on a l'équivalence suivante :

$$V \text{ admet une espérance } \iff \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\ \mathrm{d}t \text{ converge,}$$

et qu'on a dans ce cas :

$$E(V) = \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\ \mathrm{d}t.$$

   (a) Montrer que :

$$\forall x \geq 0,\ \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (1 - \Phi(t))\,\mathrm{d}t - x(1 - \Phi(x)).$$

   (b) On suppose que V admet une espérance. Montrer que $x\,(1 - \Phi(x))$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
   En déduire que $\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\ \mathrm{d}t$ converge.

   (c) On suppose que $\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\ \mathrm{d}t$ converge. Montrer que V admet une espérance.

   (d) Conclure.

On admet que le résultat de la question 3 reste vrai si la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^+$ sauf en un nombre fini de points.

Partie B - Quelques exemples

4. On suppose dans cette question que X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{\alpha}{1 + x^2} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

   (a) Déterminer le réel α.

   (b) Donner la fonction de répartition F de X.

   (c) Déterminer la fonction de répartition F_2 de Y_2 et justifier que Y_2 admet une densité f_2, que l'on calculera.

   (d) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

   (e) En déduire un équivalent de f_2 en $+\infty$.

   (f) En déduire que la loi de X est implosive et donner son indice d'implosion.

5. On suppose dans cette question que X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad P(X = k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

(a) Vérifier que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$.

(b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

(c) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $F(k) = P(X \leqslant k)$.

(d) Déterminer la loi de Y_2. Admet-elle une espérance ?

(e) Déterminer la loi de Y_3. Admet-elle une espérance ?

(f) La loi de X est-elle implosive ? Si oui, quel est son indice d'implosion ?

Partie C - Loi implosive d'indice fixé

On souhaite dans cette partie répondre à la question suivante : « *Existe-t-il, pour tout entier naturel $m \geq 2$, une loi qui est implosive et d'indice d'implosion égal à m ?* »

6. Soit $\alpha > 1$.

(a) Déterminer un réel a tel que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \dfrac{a}{x^\alpha} & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

(b) Dans la suite de cette partie, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

Déterminer la fonction de répartition F de X.

(c) Discuter, en fonction de α, l'existence de l'espérance de X.

(d) Discuter, en fonction de n et de α, l'existence de l'espérance de Y_n.

(e) Répondre à la question posée.

Partie D - Lois non implosives

On souhaite dans cette partie répondre à la question suivante : « *Existe-t-il des variables aléatoires positives qui n'admettent pas d'espérance et dont la loi n'est pas implosive ?* »

7. (a) Déterminer un réel a tel que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ \dfrac{a}{x \ln^2(x)} & \text{si } x \geq 2, \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

(b) Dans la suite de cette partie, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

Déterminer la fonction de répartition F de X.

(c) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

(d) Discuter l'existence de l'espérance de Y_n.

(e) Répondre à la question posée.

Partie E - Variables implosant sur une autre

Soit Y une variable aléatoire positive admettant une espérance. On dit que **la variable aléatoire X implose sur Y** si X est implosive et si, en notant m son indice d'implosion, Y_m est de même loi que Y.

8. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles et soit n un entier supérieur ou égal à 2 tel que Y_n a la même loi que Y. À l'aide de la formule de la question **A.1**, exprimer la fonction de répartition de X en fonction de celle de Y.

9. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. À l'aide de la question précédente, montrer qu'il n'existe aucune variable aléatoire X implosive qui implose sur Y.

10. Soit m un entier tel que $m \geq 2$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y admettant une espérance et une variable aléatoire X implosive d'indice d'implosion m qui implose sur Y.

    On pourra s'inspirer des résultats de la partie C).

11. Soit Y une variable aléatoire positive admettant une densité g. On note G sa fonction de répartition.

    Soit m un entier tel que $m \geq 2$. Montrer que s'il existe une variable aléatoire X implosive, d'indice d'implosion m, qui implose sur Y, alors pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq m$, il existe une variable aléatoire implosive, d'indice d'implosion k, qui implose sur Y.
