DS0

Correction du Devoir Surveillé

Exercice 1 (Edhec 2018)

1. On applique le théorème de la bijection :

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est polynomiale, donc **continue**.
   - f_n est également dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (car polynomiale), et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
   $$f_n'(x) = -1 - nx^{n-1} < 0.$$
   Donc f_n est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}_+$.
   - On a $f_n(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = -\infty$.

   D'après le théorème de la bijection, f_n réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty, 1]$. Puisque $0 \in]-\infty, 1]$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On la note dans la suite u_n.

   Mise en garde.
   Dire que $f_n'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ ne suffit pas pour conclure que f_n est strictement décroissante. Rappelons le résultat de cours suivant :

   > Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
   > Si f' est strictement négative, sauf éventuellement en un nombre fini de points de I où f' s'annule, alors f est strictement décroissante.

   En particulier ici $f_n' < 0$ sur $\mathbb{R}_+$, donc f_n est strictement décroissante.

2. (a) On a $f_n(0) = 1$, $f_n(u_n) = 0$ et $f_n(1) = -1$. Comme de plus f_n est strictement décroissante, on en déduit que u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

   (b) Rappelons comment procéder.

   Méthode.
   Pour déterminer la monotonie d'une suite implicite, on peut comparer les images $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$, et conclure grâce à la monotonie de f_{n+1}.

   Puisque $u_n \in]0, 1[$, on a $u_n^{n+1} \leq u_n^n$, et donc :
   $$f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1} \geq 1 - u_n - u_n^n = f_n(u_n) = 0.$$
   Puisque f_{n+1} est strictement décroissante et que
   $$f_{n+1}(u_n) \geq 0 = f_{n+1}(u_{n+1}),$$
   on en déduit que $u_n \leq u_{n+1}$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que la suite (u_n) est croissante.

   (c) La suite (u_n) est **croissante** et **majorée** (car $u_n \in]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Par le théorème de la limite monotone, on peut donc conclure que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ finie. De plus on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 1.$$
   Par passage à la limite dans une inégalité, on obtient donc que $0 \leq \ell \leq 1$.

   Mise en garde.
   Une inégalité stricte devient large quand on passe à la limite !

   (d)

Méthode.

Il faut pour ce type de question penser à revenir à l'équation $f_n(u_n) = 0$ pour obtenir des informations sur (u_n).

Par l'absurde, supposons que $0 \leq \ell < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_n(u_n) = 0 \quad \text{soit } 1 - u_n - u_n^n = 0.$$

(u_n) étant croissante et convergente vers ℓ, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_n \leq \ell, \quad \text{d'où} \quad 0 \leq u_n^n \leq \ell^n.$$

Or par hypothèse $0 \leq \ell < 1$, donc on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell^n = 0$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^n = 0$. Ainsi tous les termes de l'égalité $1 - u_n - u_n^n = 0$ convergent. Par le théorème de passage à la limite dans les (in)égalités, on en déduit que :

$$1 - \ell - 0 = 0 \quad \text{soit encore } \ell = 1.$$

D'où une contradiction puisque $\ell < 1$ par hypothèse. On peut donc conclure que $\ell = 1$.

Mise en garde.

Ne pas confondre le théorème des gendarmes et le théorème de passage à la limite dans les (in)égalités.

- Pour appliquer le théorème de passage à la limite dans les inégalités, il faut savoir au préalable que **tous** les termes convergent.
- Le théorème des gendarmes est d'une autre nature et démontre deux choses : la **convergence** de la suite encadrée et la valeur de sa limite.

3. (a) Puisque $u_n \in]0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $v_n = 1 - u_n \in]0,1[$ et $\ln(v_n)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus on a $1 - u_n - u_n^n = 0$ et donc :

$$\ln(v_n) = \ln(1 - u_n) = \ln(u_n^n) = n\ln(u_n) = n\ln(1 + (u_n - 1)).$$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - 1 = 0$, on a :

$$\ln(1 + (u_n - 1)) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n - 1 = -v_n.$$

D'où finalement $\ln(v_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} -nv_n$.

(b) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0^+$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(v_n) = -\infty$. D'autre part, on a $\ln(v_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} -nv_n$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-\ln(v_n)}{nv_n} = 1$ et on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\dfrac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right) = 0$. Par opération sur les limites, on en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0.$$

On a $-\ln(v_n), nv_n > 0$, d'où :

$$\frac{\ln\left(\dfrac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = \frac{\ln(-\ln(v_n)) - \ln(n) - \ln(v_n)}{-\ln(v_n)} = \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} + 1.$$

De plus, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} -\ln(v_n) = +\infty$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{\ln(u)}{u} = 0$ par croissances comparées, d'où par composition des limites :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} = 0.$$

On a donc finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} + 1 = 0.$$

Ainsi on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} = -1$, et donc $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

(c) On a montré que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$ et que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$. Donc on a $nv_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, soit encore $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 2 (Ecricome 2005)

1. Tout d'abord, on montre par récurrence que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

Init. u_0 est bien définie et $u_0 \geq 0$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$, et montrons la propriété au rang n.
On a $u_{n-1} \geq 0$ par hypothèse de récurrence, donc $n + u_{n-1} \geq 0$. Ainsi $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$ est bien défini, et positif. D'où la propriété au rang n.

Concl. Par principe de récurrence, u_n est bien défini et positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dès lors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a par croissance de la fonction racine carrée :

$$n \leq n + u_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} \leq \sqrt{n + u_{n-1}} = u_n$$

et on a également $u_0 \geq 0 = \sqrt{0}$. D'où la propriété souhaitée.

On a $\sqrt{n} \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Par théorème de comparaison, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. (a) Pour tout $x \geq 0$, on a :

$$\frac{1+x}{2} - \sqrt{x} = \frac{1 + x - 2\sqrt{x}}{2} = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{2} \geq 0.$$

D'où l'inégalité souhaitée.

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$.

Init. On a $u_0 \leq 0 + \frac{u_0}{2^0}$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$. Montrons qu'elle est vraie au rang n.
On applique l'inégalité de la question précédente à $x = n + u_{n-1}$:

$$u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} \leq \frac{1 + n + u_{n-1}}{2} = \frac{1+n}{2} + \frac{u_{n-1}}{2}.$$

Or par hypothèse de récurrence, on a :

$$u_{n-1} \leq n - 1 + \frac{u_0}{2^{n-1}}.$$

En remplaçant dans l'expression précédente, on obtient :

$$u_n \leq \frac{1+n}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{u_0}{2^n} = n + \frac{u_0}{2^n}.$$

D'où la propriété au rang n.

Concl. Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n-1} \leq n - 1 + \frac{u_0}{2^{n-1}} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{u_{n-1}}{n^2} \leq \frac{n-1}{n^2} + \frac{u_0}{n^2 2^{n-1}}$$

Puisque $\frac{n-1}{n^2} + \frac{u_0}{n^2 2^{n-1}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{u_0}{n^2 2^{n-1}}$ converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Par le théorème des gendarmes, la limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n-1}}{n^2}$ existe et vaut 0.

(c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_n}{n} = \frac{\sqrt{n+u_{n-1}}}{n} = \sqrt{\frac{n+u_{n-1}}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n^2}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n^2} = 0$ par la question précédente. Donc la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge bien vers 0.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sqrt{n} \leq u_n = \sqrt{n+u_{n-1}}$$

d'où :

$$1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+u_{n-1}}{n}}$$

On a donc bien que, pour tout entier n non nul, $1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}}$.

On a :

$$\frac{u_{n-1}}{n} = \frac{u_{n-1}}{n-1}\frac{n-1}{n}.$$

Or on a par la question précédente que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n-1}}{n-1} = 0$, et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1$, on obtient par produit des limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n-1}}{n} = 0.$$

Ainsi on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}} = 1$. Par le théorème des gendarmes, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ existe et vaut 1.

Ainsi on a l'équivalent $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

3. On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$.

(a) On a le développement limité usuel suivant en 0 :

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x).$$

On en déduit en particulier l'équivalent suivant :

$$\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x.$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} w_n = u_n - \sqrt{n} &= \sqrt{n+u_{n-1}} - \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}} - 1\right) \end{aligned}$$

Or on a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n-1}}{n} = 0$, donc :

$$\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{u_{n-1}}{n}.$$

Enfin on a vu que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$, donc que $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n-1}$. On obtient donc :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\frac{u_{n-1}}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\frac{\sqrt{n-1}}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2}.$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet bien la limite $\ell = \frac{1}{2}$ lorsque $n \to +\infty$.

(b) On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=0$.
On a $u_n = w_n + \sqrt{n}$ pour tout n, d'où en remplaçant :

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= (w_n + \sqrt{n}) - (w_{n-1} + \sqrt{n-1}) \\ &= (w_n - w_{n-1}) + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \end{aligned}$$

Or on a $\lim w_n = \frac{1}{2}$, donc $\lim w_{n-1} = \frac{1}{2}$, et par différence $\lim w_n - w_{n-1} = 0$. On peut donc conclure avec le calcul de la limite à la question précédente que :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - u_{n-1}) = 0.$$

(c) Puisque $\lim_{n\to+\infty}(u_n - u_{n-1}) = 0$, il existe un certain rang à partir duquel $u_n - u_{n-1} \geq -\frac{1}{2}$, c'est à dire qu'il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout entier n, si $n \geq N_0$ alors $u_n \geq u_{n-1} - \frac{1}{2}$.

(d) On a en utilisant la définition de la suite (u_n) que :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+u_n} - \sqrt{n-1+u_{n-1}}$$

On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(\sqrt{n+u_n} - \sqrt{n-1+u_{n-1}})(\sqrt{n+u_n} + \sqrt{n-1+u_{n-1}})}{\sqrt{n+u_n} + \sqrt{n-1+u_{n-1}}} \\ &= \frac{(n+u_n) - (n-1+u_{n-1})}{\sqrt{n+u_n} + \sqrt{n-1+u_{n-1}}} \\ &= \frac{1+u_n-u_{n-1}}{\sqrt{n+u_n} + \sqrt{n-1+u_{n-1}}}. \end{aligned}$$

La quantité au dénominateur étant toujours positive, $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$. Or pour $n \geq N_0$, on a :

$$1 + u_n - u_{n-1} \geq 1 - 1/2 = 1/2 \geq 0$$

On a donc pour tout $n \geq N_0$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite est donc bien croissante à partir d'un certain rang (le rang N_0).

4.

```
function U = suite(n)
U = 1;
for k=1:n
    U = sqrt(U+k); //sqrt est la fonction racine carré en SciLab
end
endfunction
```

Exercice 3 (Ecricome 2004)

Partie 1. Étude de la bijection réciproque de f.

1. On applique ici le théorème de la bijection à f.

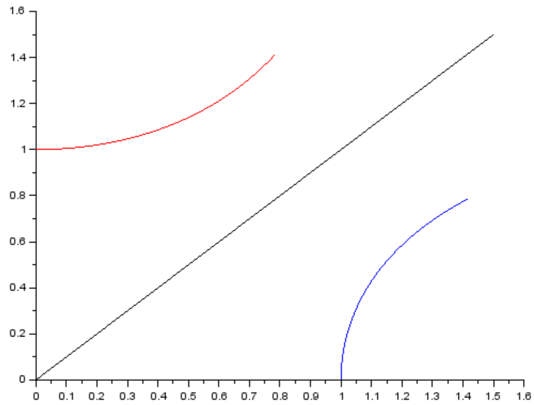
   - f est une fonction **continue sur** I comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
   - f est dérivable sur I comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et on a pour tout $x \in I$:

   $$f'(x) = -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}$$

   Pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, on a $f'(x) > 0$, et $f'(0) = 0$. La fonction f est donc **strictement croissante sur I**.

Par le théorème de la bijection, la fonction f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$ qui est $[f(0), f(\pi/4)] = \left[1, 2/\sqrt{2}\right]$.

2. On trace l'allure de la courbe de f en utilisant que $f'(0) = 0$. La courbe de f^{-1} est la symétrique de celle de f par rapport à la droite $y = x$.



Courbe de f en rouge, de f^{-1} en bleu.

Script Scilab.

```
t =0:0.1:1.5
plot2d(t,t) //droite y=x
x = linspace(0,%pi/4,100)
y = cos(x)
z=y.^(-1)
plot2d(x,z,5) //courbe de f
plot2d(z,x,2) //courbe de f^{-1}
```

3. On a pour tout $x \in J$:

$$f \circ f^{-1}(x) = x$$

d'où en remplaçant :

$$\frac{1}{\cos\left(f^{-1}(x)\right)} = x$$

On en déduit en passant à l'inverse (possible car $x \neq 0$ sur J) :

$$\cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x}.$$

Pour la deuxième égalité, on utilise que pour tout $y \in I$, on a :

$$\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2(y) = 1 - \cos^2(y).$$

Donc on a :

$$\sin(y) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(y)}.$$

Or sin est positive sur $[0, \pi/4]$, on a donc que :

$$\sin(y) = \sqrt{1 - \cos^2(y)},$$

et avec $y = f^{-1}(x)$:

$$\sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(f^{-1}(x))} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

4. Rappelons le théorème de dérivation de f^{-1} :

Rappel. Dérivabilité de la fonction réciproque.

Soit f une fonction bijective d'un intervalle I sur un intervalle J. Alors f^{-1} est dérivable sur J si et seulement si f est dérivable sur I et f' **ne s'annule pas** sur I. Et on a alors

$$\forall x \in J, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Ici f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur $I \setminus \{0\}$, donc f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{f(0)\} = J \setminus \{1\}$ et on a pour tout $x \in J \setminus \{1\}$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{\cos^2(f^{-1}(x))}{\sin(f^{-1}(x))} = \frac{1/x^2}{\sqrt{1-1/x^2}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

5. Puisque f^{-1} est dérivable en $\sqrt{2} \in J$, on sait alors que f^{-1} admet un $DL_1(\sqrt{2})$ et que celui-ci est :

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(\sqrt{2}) + (f^{-1})'(\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) + o((x-\sqrt{2})).$$

Or $f^{-1}(\sqrt{2}) = \dfrac{\pi}{4}$ et $(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On a donc le DL :

$$f^{-1}(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-\sqrt{2}) + o((x-\sqrt{2})).$$

Partie 2. Étude des dérivées successives de f.

1. f est le quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I dont le dénominateur ne s'annule pas, donc f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

2. On montre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.$$

Init. On a $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$ en prenant $P_0 = 1$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n, et montrons cette propriété au rang $n+1$.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.$$

On dérive (f est $\mathscr{C}^\infty$, on peut donc le faire) :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\cos(x)P_n'(\sin(x))\cos^{n+1}(x) - (n+1)\sin(x)\cos^n(x)P_n(\sin(x)}{\cos(x)^{2n+2}} \\ &= \frac{\cos^2(x)P_n'(\sin(x)) - (n+1)\sin(x)P_n(\sin(x)}{\cos(x)^{n+2}} \\ &= \frac{(1-\sin^2(x))P_n'(\sin(x)) - (n+1)\sin(x)P_n(\sin(x)}{\cos(x)^{n+2}}. \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$ en posant $P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n$.

Concl. Par principe de récurrence, on a donc montré la propriété pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On dérive f :

$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}.$$

D'où $P_1 = X$. On dérive de nouveau ($f$est deux fois dérivable !) :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\cos(x)\cos(x)^2 + 2\sin(x)\cos(x)\sin(x)}{\cos(x)^4} \\ &= \frac{\cos(x)^2 + 2\sin(x)^2}{\cos(x)^3} = \frac{(1-\sin(x)^2) + 2\sin(x)^2}{\cos(x)^3} \end{aligned}$$

Donc $P_2 = 1 + X^2$.

> **Pour aller plus loin.**
>
> S'il existe, le polynôme P_n satisfaisant :
>
> $$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$$
>
> est unique. En effet, si Q_n satisfait la même relation, on aurait alors :
>
> $$\frac{P_n(\sin(x)) - Q_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)} = 0, \quad \text{soit } (P_n - Q_n)(\sin(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$
>
> Le polynôme $P_n - Q_n$ admet ainsi une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul, et donc $P_n = Q_n$.

4. On a vu dans la récurrence précédente que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n$. On calcule P_3 grâce à cette formule. On trouve $P_3 = X^3 + 5X$.

5. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$ et que $CD(P_n) = 1$ ($CD(P_n)$: coefficient dominant de P_n).

Init. $P_0 = 1$ donc la propriété est vrai au rang $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n, et montrons la propriété au rang $n+1$.

On a :

$$P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n$$

Par hypothèse de récurrence, $\deg(P_n) = n$ et P_n unitaire. Donc ici, le degré de P_n' est au plus $n-1$, donc $\deg((1-X^2)P_n') \leq n+1$, et $\deg((n+1)XP_n) = n+1$. Ainsi $\deg(P_{n+1}) \leq n+1$.

On regarde le terme de plus au degré, en X^{n+1} : dans $(1-X^2)P_n'$, il est égal à $-X^2 \times (nX^{n-1}) = -nX^{n+1}$, et dans $(n+1)XP_n$ il vaut $(n+1)X \times X^n$. Ainsi le terme de plus au degré de P_{n+1} est $-n + (n+1) = 1$. D'où la propriété au rang $n+1$.

Concl. On conclut par principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unitaire de degré n.
