DS0

Devoir Surveillé du 02/09/2019

Durée : 2h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

La lettre n désigne un entier naturel non nul.
Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x admet une seule solution, notée u_n.
2. (a) Vérifier que u_n appartient à $]0, 1[$.
   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0, 1]$.
   (d) Montrer par l'absurde que la limite de la suite (u_n) vaut 1.
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -n\, v_n$.
   (b) Établir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{n\, v_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$ et en déduire que : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.
   (c) Montrer enfin que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 2

On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n \geq \sqrt{n}$. Quelle est la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?
2. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{x} \leq \dfrac{1+x}{2}$.
   (b) En déduire que pour tout entier n, $u_n \leq n + \dfrac{u_0}{2^n}$, puis que la suite $\left(\dfrac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0.
   (c) Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0.
   (d) En remarquant que, pour tout entier n non nul, $1 \leq \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \dfrac{u_{n-1}}{n}}$, en déduire un équivalent de u_n en $+\infty$.
3. On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$.
   (a) À l'aide d'un développement limité en 0 de $\sqrt{1+x}$, montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ que l'on précisera.
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n - u_{n-1})$.

(c) Justifier alors qu'il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout entier n, si $n \geq N_0$ alors $u_n \geq u_{n-1} - \frac{1}{2}$.

(d) Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$, puis que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

4. Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function U = suite(n)` qui calcule le terme d'indice n de la suite lorsque $u_0 = 1$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

Partie 1. Étude de la bijection réciproque de f.

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans l'intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.

2. Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1}.

3. Justifier que pour tout $x \in J$, $\begin{cases} \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \\ \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \end{cases}$.

4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et montrer que :

$$\forall x \in J \setminus \{1\},\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

5. En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de f^{-1} à l'ordre 1.

Partie 2. Étude des dérivées successives de f.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f sur I.

2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.$$

3. Déterminer les polynômes P_1 et P_2.

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = (1 - X^2)P_n' + (n+1)XP_n$.
   En déduire le polynôme P_3.

5. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.
