DS1

Correction du devoir surveillé

Exercice 1 (ESCP 2015 Voie T)

1. On a $\boxed{X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$, $u_3 = 2u_2 - \frac{5}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_0 = 2$, donc $\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

2. (a) Les relations $\begin{cases} u_{n+3} = & 2u_{n+2} & -\frac{5}{4}u_{n+1} & +\frac{1}{4}u_n \\ u_{n+2} = & u_{n+2} & & \\ u_{n+1} = & & u_{n+1} & \end{cases}$ s'écrivent matriciellement sous la forme $\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\boxed{X_{n+1} = AX_n}$ puisqu'on a $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = A$.

   (b) On montre, par récurrence, que, pour tout entier $n \geq 0$, $X_n = A^n X_0$.

   Init. La formule est vraie pour $n = 0$: $X_0 = A^0 X_0$ ($A^0 = I$).

   Hér. Soit n un entier naturel pour lequel on a $X_n = A^n X_0$. Puisque $X_{n+1} = AX_n$, on a alors :

   $$X_{n+1} = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$

   La formule est donc encore vraie pour l'entier $n + 1$.

   On peut alors conclure que, pour tout entier $n \geq 0$, $X_n = A^n X_0$.

3. (a) On trouve $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I$.

   On en déduit que $P \times \frac{1}{4}Q = \frac{1}{4}PQ = I$, ce qui montre que $\boxed{P \text{ est inversible, avec } P^{-1} = \frac{1}{4}Q}$.

   (b) On trouve $PT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, et $AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

   On voit que $AP = PT$. En multipliant cette égalité, membre à membre à droite par P^{-1}, on obtient $\boxed{A = PTP^{-1}}$.

   On montre alors, par récurrence, que, pour tout entier $n \geq 0$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

   Init. La formule est vraie pour $n = 0$: $A^0 = I$ et $PT^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.
   On a aussi montré qu'elle est vraie pour $n = 1$: $A^1 = PT^1P^{-1}$.

Hér. On suppose alors que, pour un entier $n \geq 1$, on a $A^n = PT^nP^{-1}$. On en déduit :

$$A^{n+1} = A^n A = \left(PT^nP^{-1}\right)\left(PTP^{-1}\right) = PT^n\left(P^{-1}P\right)TP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$$

car $P^{-1}P = I$. La formule est donc encore vraie pour l'entier $n+1$

Par principe de récurrence, on a $\boxed{A^n = PT^nP^{-1} \text{ entier } n \geq 0}$.

4. Soit D la matrice définie par : $D = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $N = T - D$.

(a) On a $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'où $\boxed{N^k = N^2 \times N^{k-2} = 0 \times N^{k-2} = 0_3 \text{ pour tout entier } k \geq 2}$.

(b) On trouve $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND \; (= \dfrac{1}{2}N)$.

De $N = T - D$, on déduit $T = D + N$. Puisque $DN = ND$ (D et N **commutent**), la formule du binôme donne, pour tout entier $n \geq 2$:

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}N^k.$$

Puisque, pour tout $k \geq 2$, $N^k = 0$, la somme se réduit aux termes correspondant à $k = 0$ et à $k = 1$.

Puisque $\dbinom{n}{0} D^n N^0 = D^n$, et $\dbinom{n}{1} D^{n-1}N = nD^{n-1}N$, on a $T^n = D^n + nD^{n-1}N$.

D étant diagonale, on a $D^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $D^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

d'où $D^{n-1}N = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il vient :

$$\begin{aligned} T^n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\boxed{T^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$. On voit (remplacer n par 0, puis par 1) que la formule est aussi vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq 0$.

(c) On trouve
$$\begin{aligned} PT^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

puis

$$A^n = PT^nP^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

D'où $\boxed{A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4\times 2^n - n - 3 & \frac{3}{2}n - 4\times 2^n + 4 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 4\times 2^n - 2n - 4 & 3n - 4\times 2^n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 4\times 2^n - 4n - 4 & 6n - 4\times 2^n + 4 & 2^n - 2n \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

5. (a) On obtient u_n en calculant le vecteur-colonne X_n par la formule $X_n = A^nX_0$. Comme $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient X_n en recopiant simplement la première colonne de A^n. Ainsi, $X_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4\times 2^n - n - 3 \\ 4\times 2^n - 2n - 4 \\ 4\times 2^n - 4n - 4 \end{pmatrix}$, et, en particulier ($X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$)

$$\boxed{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (4\times 2^n - 4n - 4)\,.}$$

(b) Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n}{2^n} = 0$. Comme de plus, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{4}{2^n} = 0$, on a conclut que

$$\boxed{\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 4}$$

6. On peut procéder ainsi.

```
n = input("Entrer un entier naturel")
A = [2, -5/4, 1/4 ; 1, 0, 0; 0, 1, 0]
X = (A^n)*[1;0;0]
u = X(3)
disp(u)
```

Exercice 2 (Edhec 2016)

1. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a :

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2} < 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^*$$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$$\begin{array}{c||ccc} x & 0 & & +\infty \\ \hline f(x) & +\infty & & \\ & & \searrow & \\ & & & 0 \end{array}$$

(b) Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n)$: u_n est bien défini et $u_n > 0$.

Initialisation. On a $u_0 = 1$, donc u_0 est bien défini, et $u_0 > 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété $\mathscr{P}(n)$ vraie au rang n, et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, u_n est bien définie et strictement positive. Donc $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{u_n}$ est bien définie et on a $u_{n+1} > 0$. Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion. Par principe de récurrence, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\, u_n \text{ est bien défini}}$ et que $\boxed{u_n > 0}$.

2. Les scripts calculent les termes successifs de la suite, mais le premier script s'arrête lorsque `u<=0.00001` et le second lorsque `u>=100000`, `n` sert de compteur, il indique l'indice du dernier terme calculé. Ainsi, $\boxed{u_5 \leqslant 0,00001 \text{ et } u_6 \geqslant 100000}$ et ce sont les premiers termes de la suite à vérifier ces inégalités.

   De telles écarts peuvent nous faire conjecturer que $\boxed{\text{la suite n'admet pas de limite}}$ (et même que la suite des termes de rang pair tend vers $+\infty$ et celle des termes de rang impair tend vers 0).

3. (a) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée et somme de fonctions qui le sont, et $g'(x) = -e^{-x} - 2x < 0$ sur $\mathbb{R}_+$. La fonction g est donc **continue** et **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}_+$, elle réalise alors une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $g(\mathbb{R}_+) =]-\infty, 1]$

   (b) Sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x$ ssi $\frac{e^{-x}}{x} = x$ ssi $e^{-x} = x^2$ ssi $g(x) = 0$.
   Or d'après la question précédente 0 possède un unique antécédent dans $\mathbb{R}_+$ par g. On le note alors $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

   (c) Déterminons le signe de $g\left(\frac{1}{e}\right)$ et $g(1)$. On a $g\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-1/e} - \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e^{1/e}} - \frac{1}{e^2}$. Or on a

$$\frac{1}{e} < 2 \Rightarrow \underset{\text{exp croissante}}{\Rightarrow} e^{1/e} < e^2 \Rightarrow \frac{1}{e^{1/e}} > \frac{1}{e^2} \Rightarrow g\left(\frac{1}{e}\right) > 0.$$

   D'autre part, on a $g(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ puisque $e > 2$. Ainsi on a $g(1) < g(\alpha) < g\left(\frac{1}{e}\right)$. Comme g est strictement décroissante, on en déduit que $\boxed{1 > \alpha > \dfrac{1}{e}}$.

4. (a) On peut calculer $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{e}$ et $u_2 = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e^{-1/e}}{1/e} = e^{\frac{e-1}{e}}$. Or on a $\frac{e-1}{e} > 0$ donc $e^{\frac{e-1}{e}} > 1$, d'où $\boxed{u_2 = f(u_1) > 1 = u_0}$.
   Pour l'autre inégalité, il suffit de remarquer que f est décroissante. On obtient donc $f(u_2) < f(u_0)$, soit encore $\boxed{u_3 < u_1}$.

   (b) Montrons que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Pour cela, on peut montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{2n+2} \geq u_{2n}$.

Initialisation. On a montré en 4.(a) que $u_2 \geq u_0$. Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n. On a donc

$$\begin{aligned} u_{2n+2} \geq u_{2n} &\underset{f\text{décroissante}}{\Rightarrow} u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) \leq f(u_{2n}) = u_{2n+1} \\ &\underset{f\text{décroissante}}{\Rightarrow} u_{2n+4} = f(u_{2n+3}) \geq f(u_{2n+1}) = u_{2n+2}. \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion. Par principe de récurrence, on peut donc conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} \geq u_{2n}$. La suite $\boxed{(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc croissante}}$.

Pour $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ c'est plus simple : comme $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} \geq u_{2n}$. En composant par f (décroissante), on obtient :

$$u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$$

La suite $\boxed{(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

5. (a) Pour $x > 0$,

$$h(x) = f(f(x)) = \frac{e^{-f(x)}}{f(x)} = \frac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{\frac{e^{-x}}{x}} = x\frac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{e^{-x}} = xe^{x-\frac{e^{-x}}{x}} = xe^{x-f(x)}$$

De plus, d'après 1., on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc par composition de limite : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(f(x)) = 0 = h(0)$, donc $\boxed{h \text{ est bien continue en } 0}$.

(b) Tout d'abord, on a $h(0) = 0$ donc 0 est solution de l'équation $h(x) = x$. Supposons à présent $x > 0$. On a :

$$h(x) = x \Leftrightarrow xe^{x-f(x)} = x \underset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} e^{x-f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = x \underset{3.(b)}{\Leftrightarrow} x = \alpha.$$

Ainsi l'équation $h(x) = x$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}_+$ qui sont 0 et α.

(c) $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0) donc $\boxed{\text{elle converge}}$ vers une limite $0 \leq \ell \leq u_1 = \frac{1}{e} < \alpha$ (d'après 3.(c)). De plus, $u_{2n+3} = h(u_{2n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite, on a (puisque h est continue sur $\mathbb{R}^+$) que $h(\ell) = \ell$. Compte tenu de ce qui précède et du fait que $\ell < \alpha$, on a nécessairement $\boxed{\ell = 0}$.

(d) Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell'$. On aurait déjà que $\ell' \geq 1 = u_0$ puisque (u_{2n}) est croissante. De plus, puisque f est **continue** sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_{2n}) = f(\ell')$, soit encore $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = f(\ell')$. Mais d'après la question précédente, cela implique que $f(\ell') = 0$. Or ceci est absurde puisque 0 n'a pas d'antécédent par f d'après 1.(a).

Ainsi la suite $\boxed{(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas vers une limite finie}}$. Puisqu'elle est de plus croissante, $\boxed{\text{sa limite est donc } +\infty}$.

Exercice 3 (EML 2005)
Partie I : Calcul de la somme d'une série convergente.

1. C'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Elle est donc bien définie. On effectue trois intégrations par parties successivement :

$$\begin{array}{c|ccc}
+ & \dfrac{t^2}{2\pi} - t & & \cos(nt) \\
 & & \searrow & \\
- & \dfrac{t}{\pi} - 1 & & \dfrac{\sin(nt)}{n} \\
 & & \searrow & \\
+ & \dfrac{1}{\pi} & & -\dfrac{\cos(nt)}{n^2} \\
 & & \searrow & \\
- & 0 & \xleftarrow{\int} & -\dfrac{\sin(nt)}{n^3}
\end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto \dfrac{t^2}{2\pi} - t$ et $t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{n^3}$ sont de classe $\mathscr{C}^3$. On obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)dt &= \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{\sin(nt)}{n} + \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\frac{\cos(nt)}{n^2} - \frac{\sin(nt)}{\pi n^3}\right]_0^\pi + \int_0^\pi 0 \times \frac{\sin(nt)}{n^3} dt \\ &= \left(\frac{\pi}{\pi} - 1\right)\frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \left(\frac{0}{\pi} - 1\right)\frac{\cos(n0)}{n^2} = \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

car $\sin(k\pi) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

2. On factorise par l'angle moitié en haut et en bas de la fraction. On obtient :

$$\frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} e^{it} = \frac{e^{imt/2}(e^{-imt/2} - e^{imt/2})}{e^{it/2}(e^{-it/2} - e^{it/2})} e^{it} = \frac{-2i\sin(mt/2)}{-2i\sin(t/2)} \frac{e^{it}e^{imt/2}}{e^{it/2}} = \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} e^{\frac{i(m+1)t}{2}}$$

D'autre part, on a :

$$\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^m e^{int}\right)$$

Or $e^{it} \neq 1$ car $t \in]0, \pi]$. Donc on obtient :

$$\sum_{n=1}^m e^{int} = e^{it}\frac{1 - (e^{it})^m}{1 - e^{it}} = \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} e^{\frac{i(m+1)t}{2}} = \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\left(\cos(\frac{(m+1)t}{2}) + i\sin(\frac{(m+1)t}{2})\right).$$

On peut donc conclure en prenant la partie réelle que pour tout $m \in \mathbb{N}^\times$ et tout t de $]0, \pi]$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\cos\dfrac{(m+1)t}{2}\sin\dfrac{mt}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}.}$$

3. C'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, donc l'intégrale est bien définie.

On effectue une intégration par partie ($\lambda > 0$) :

$$\begin{array}{c|ccc} + & u(t) & & \sin(\lambda t) \\ & & \searrow & \\ - & u'(t) & \xleftarrow{\int} & -\dfrac{\cos(\lambda t)}{\lambda} \end{array}$$

Les fonctions u et $t \mapsto \dfrac{\cos(\lambda t)}{\lambda}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$. On obtient donc :

$$\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\, dt = \left[-u(t)\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}\right]_0^\pi + \int_0^\pi u'(t)\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} dt.$$

On obtient alors en prenant la valeur absolue :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\, dt\right| &= \left|-u(\pi)\frac{\cos(\lambda\pi)}{\lambda} - u(0)\frac{1}{\lambda} + \int_0^\pi u'(t)\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} dt\right| \\ &\leq \frac{|u(\pi)|}{\lambda} + \frac{|u(0)|}{\lambda} + \left|\int_0^\pi u'(t)\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} dt\right| \qquad \text{inég. triang.} \\ &\leq \frac{|u(\pi)|}{\lambda} + \frac{|u(0)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi \left|u'(t)\cos(\lambda t)\right| dt \qquad \text{inég. de la moyenne} \\ &\leq \frac{|u(\pi)|}{\lambda} + \frac{|u(0)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi \left|u'(t)\right| dt\end{aligned}$$

Lorsque $\lambda \to 0$, le membre de droite de l'inégalité tend vers 0. Donc par théorème d'encadrement, on en déduit que $\boxed{\lim_{\lambda \to 0}\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\, \mathrm{d}t \text{ existe et vaut } 0}$.

4. (a) La fonction f est continue sur $]0,\pi]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus on a :

$$\frac{\dfrac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin\dfrac{t}{2}} \underset{0}{\sim} \frac{-t}{2\times t/2} = -1.$$

Donc $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = -1 = f(0)$, et $\boxed{f \text{ est continue sur } [0,\pi]}$.

(b) On calcule le taux d'accroissement en 0. On a :

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \frac{\frac{t^2}{2\pi}-t+2\sin(t/2)}{2t\sin(t/2)}.$$

On cherche un développement limité en haut en 0 :

$$\frac{t^2}{2\pi}-t+2\sin(t/2) = \frac{t^2}{2\pi}-t+2(t/2+o(t^2)) = \frac{t^2}{2\pi}+o(t^2)$$

Ainsi on a $\frac{t^2}{2\pi}-t+2\sin(t/2) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2\pi}$, et on obtient finalement :

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{t^2}{2\pi}}{2t(t/2)} = \frac{1}{2\pi}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}$ existe et vaut $\dfrac{1}{2\pi}$. La fonction $\boxed{f \text{ est donc dérivable en } 0}$, et $\boxed{f'(0) = \dfrac{1}{2\pi}}$.

(c) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, et on a pour tout $t>0$:

$$f'(t) = \frac{(t/\pi-1)2\sin(t/2)-(t^2/2\pi-t)\cos(t/2)}{4\sin^2(t/2)}.$$

Cherchons un équivalent du numérateur. On a :

$$\left(\frac{t}{\pi}-1\right)2\sin(t/2) = \left(\frac{t}{\pi}-1\right)2\left(t/2+o(t^2)\right) = -t+\frac{t^2}{\pi}+o(t^2)$$

et

$$(t^2/2\pi-t)\cos(t/2) = (t^2/2\pi-t)(1+o(t)) = -t+\frac{t^2}{2\pi}+o(t^2).$$

On en déduit que :

$$(t/\pi-1)2\sin(t/2)-(t^2/2\pi-t)\cos(t/2) = -t+\frac{t^2}{\pi}-\left(-t+\frac{t^2}{2\pi}\right)+o(t^2) = \frac{t^2}{2\pi}+o(t^2).$$

On peut donc conclure que :

$$\frac{(t/\pi-1)2\sin(t/2)-(t^2/2\pi-t)\cos(t/2)}{4\sin^2(t/2)} \underset{0}{\sim} \frac{\dfrac{t^2}{2\pi}}{4(t/2)^2} = \frac{1}{2\pi}.$$

Ainsi on a montré que $\lim\limits_{t\to 0^+} f'(t) = \dfrac{1}{2\pi} = f'(0)$. Donc $\boxed{f \text{ est bien de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,\pi]}$.

Remarque. On aurait pu faire les questions (b) et (c) ensembles en appliquant le théorème de passage à la limite sur la dérivée.

5. (a) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \text{ et } \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a).$$

D'où en sommant on obtient

$$\boxed{\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b).}$$

(b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{m} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(nt) dt \qquad \text{d'après 1.} \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \left(\sum_{n=1}^{m} \cos(nt)\right) dt \qquad \text{par lin. de l'int.} \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{\cos\dfrac{(m+1)t}{2} \sin\dfrac{mt}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}} dt \qquad \text{par 2.} \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin(t/2)}\right) 2\cos\frac{(m+1)t}{2} \sin\frac{mt}{2} dt \qquad \text{par 5.(a).} \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin(t/2)}\right) \left(\sin\left(\frac{mt}{2} + \frac{(m+1)t}{2}\right) + \sin\left(\frac{mt}{2} - \frac{(m+1)t}{2}\right)\right) dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin(t/2)}\right) \sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right) dt + \int_0^{\pi} \left(\frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin(t/2)}\right) \sin\left(-\frac{t}{2}\right) dt \\
&= \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right) dt - \int_0^{\pi} \frac{t^2}{4\pi} - \frac{t}{2}\, dt
\end{aligned}$$

Or on a :

$$\int_0^{\pi} \frac{t^2}{4\pi} - \frac{t}{2}\, dt = \left[\frac{t^3}{12\pi} - \frac{t^2}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{12\pi} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{1-3}{12}\pi = -\frac{\pi^2}{6}.$$

On obtient donc finalement que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t) \sin\frac{(2m+1)t}{2} \mathrm{d}t.}$$

(c) Or f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Donc d'après 3., on en déduit que :

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin\frac{(2m+1)t}{2} dt \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi la série $\boxed{\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge}}$ (on le savait déjà, c'est une série de Riemann), et on a $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.

Partie II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente.

1. (a) Soit $(x, y) \in ([0, +\infty[)^2$ fixé.

La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ est à termes positifs, et son terme général $\frac{1}{(n+x)(n+y)}$ est équivalent à $\frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente (puisque $\alpha = 2 > 1$). Par théorème de comparaison, on en déduit que $\boxed{\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)} \text{ converge}}$.

La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ est à termes positifs, et son terme général $\frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ est équivalent à $\frac{1}{n^3}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente (puisque $\alpha = 3 > 1$). Par théorème de comparaison, on en déduit que $\boxed{\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \text{ converge}}$ aussi.

(b) On a pour tout x de $[0, +\infty[$:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}$$

qui est le terme général d'une série convergente (question précédente avec $y = 0$). Donc la série $\boxed{\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) \text{ converge}}$.

On note S l'application définie, pour tout x de $[0, +\infty[$, par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

2. On a $S(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$.

On a $S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{1} - \frac{1}{m+1} = 1$.

3. (a) On a pour tout $(x, y) \in ([0, +\infty[)^2$,

$$\begin{aligned} S(y) - S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{y+1}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+y} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+y}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(n+y)-(n+x)}{(n+x)(n+y)}\right) \\ &= (y-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)} \end{aligned}$$

(b) D'où en prenant la valeur absolue :

$$\begin{aligned} |S(y) - S(x)| &= \left| (y-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)} \right| \\ &\leq |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)} \\ &\leq |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = |y-x| \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

(c) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a pour tout $y \in [0, +\infty[$,

$$\lim_{y \to x} |y - x| \frac{\pi^2}{6} = 0.$$

Donc par encadrement $\lim_{y \to x} S(y)$ existe et vaut $S(x)$. En d'autres termes, la fonction S est continue en x. Comme ceci est vrai quelque soit $x \geq 0$, on en déduit que $\boxed{S \text{ est continue sur } [0, +\infty[}$.

4. (a) Soit (x, y) dans $([0, +\infty[)^2$ tel que $x \neq y$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+x)(n+y)} - \frac{1}{(n+x)^2} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(n+x) - (n+y)}{(n+x)^2(n+y)} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x - y}{(n+x)^2(n+y)} \right)
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x - y}{(n+x)^2(n+y)} \right) \right| \\
&\leq |x - y| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \\
&\leq |x - y| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}
\end{aligned}$$

car $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge comme somme de Riemann avec $\alpha = 3 > 1$, et que $\frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \leq \frac{1}{n^3}$ pour tout $x, y \geq 0$.

(b) Soit $x \geq 0$. Alors pour tout $y \geq 0$, on a

$$\lim_{y \to x} |x - y| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Donc par théorème d'encadrement, $\lim_{y \to x} \frac{S(y) - S(x)}{y - x}$ existe et vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$. Ainsi la fonction $\boxed{S \text{ est dérivable en tout } x \geq 0}$, donc sur $[0, +\infty[$, et on a :

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.}$$

(c) On a $S'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n)^2} = \frac{\pi^2}{6}$ d'après la partie I.

On a $S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{(m)^2} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m)^2} - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1 = \frac{\pi^2 - 6}{6}$.

5. On se souvient qu'une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I est concave si et seulement si f' est décroissante.

Ici on a pour tout $x \geq 0$, $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2}$.

Or si $x, y \geq 0$ sont tels que $x \leq y$. Alors $(x+n)^2 \leq (y+n)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc $\dfrac{1}{(y+n)^2} \leq \dfrac{1}{(x+n)^2}$. On obtient en sommant que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(y+n)^2} \leq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(x+n)^2}.$$

On passe à la limite quand $m \to +\infty$ (tout converge bien ici) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(y+n)^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} \quad \text{soit encore} \quad S'(y) \leq S'(x).$$

Donc S' est décroissante, et $\boxed{S \text{ est concave}}$.

6. (a) La fonction φ est continue sur $[1, +\infty[$, donc l'intégrale considérée est généralisée en $+\infty$. On a :
   - $\varphi(t) = \dfrac{t+x-t}{t(t+x)} = \dfrac{x}{t(t+x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{t^2}$;
   - $\dfrac{x}{t^2} \geq 0$;
   - L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = 2 > 1$).

   Par théorème de comparaison, on en déduit que l'intégrale $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t \text{ converge}}$. On a de plus pour tout $y > 1$:

   $$\int_1^y \varphi(t)dt = [\ln(t) - \ln(t+x)]_1^y = \ln(y) - \ln(x+y) + \ln(1+x) = \ln\left(\frac{y(1+x)}{x+y}\right).$$

   Or on a $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} \ln\left(\frac{y(1+x)}{x+y}\right) = \ln(1+x)$, donc on retrouve que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge, et $\boxed{\text{elle vaut } \ln(1+x)}$.

   (b) φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions usuelles, et on a pour tout $t > 0$,

   $$\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+x)^2} < 0$$

   La fonction φ est donc décroissante. On en déduit en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [n, n+1]$, on a :

   $$\varphi(n+1) \leq \varphi(t) \leq \varphi(n).$$

   D'où en prenant l'intégrale entre n et $n+1$ (l'intégrale est croissante) :

   $$\boxed{\varphi(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} \varphi(t)\mathrm{d}t \leqslant \varphi(n).}$$

   Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On somme alors ces inégalité pour $n = 1, \ldots, m$:

   $$\sum_{n=1}^{m} \varphi(n+1) \leq \sum_{n=1}^{m} \int_n^{n+1} \varphi(t) \leq \sum_{n=1}^{m} \varphi(n)$$

soit encore :

$$\sum_{n=1}^{m} \varphi(n+1) \leq \int_{1}^{m+1} \varphi(t) \leq \sum_{n=1}^{m} \varphi(n).$$

Faisons alors tendre m vers $+\infty$ dans ces inégalités (c'est bien possible car tout converge, séries et intégrales). On obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n+1) \leq \int_{1}^{+\infty} \varphi(t) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)$$

ce qui s'écrit encore :

$$S(x) - \varphi(1) \leq \int_{1}^{+\infty} \varphi(t) \leq S(x).$$

On obtient finalement :

$$\boxed{\int_{1}^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t \leqslant S(x) \leqslant \varphi(1) + \int_{1}^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t \leqslant 1 + \int_{1}^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t.}$$

(c) Or on a calculé cette intégrale en 6.(a). On obtient donc :

$$\ln(1+x) \leq S(x) \leq \ln(1+x) + 1.$$

D'où en divisant par $\ln(1+x)$, on obtient :

$$1 \leq \frac{S(x)}{\ln(1+x)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(1+x)}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{\ln(1+x)} = 1$, on en déduit par théorème des gendarmes que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{S(x)}{\ln(1+x)}$ existe et vaut 1, ce qui se réécrit sous la forme $\boxed{S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x+1)}$.

Enfin on a $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(x)+\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)} = 1 + \dfrac{\frac{1}{x})}{\ln(x)} \to 1$ lorsque $x \to 0$. On en déduit que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} \ln(x)$, et donc que $\boxed{S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)}$.

7. (a) On a $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} > 0$. Donc S est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. De plus on a $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = +\infty$.

On peut donc dresser le tableau de variation de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\frac{\pi^2}{6}$	$+$	$\frac{\pi^2}{6}-1$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Reste enfin à tracer l'allure de la courbe représentative de S.