DS1

Devoir Surveillé du 20/09/2019

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

On se propose d'étudier la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 telle que $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, soit X_n la matrice à trois lignes et une colonne définie par : $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer X_0 et X_1.
2. (a) Justifier pour tout entier naturel n, l'égalité : $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) En déduire pour tout entier naturel n, la relation $X_n = A^n X_0$.
3. Soit P, Q et T les matrices suivantes : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer le produit PQ. En déduire que la matrice P est inversible et déterminer sa matrice inverse P^{-1}.
   (b) Calculer les produits PT et AP. En déduire pour tout entier naturel n, l'égalité $A^n = PT^nP^{-1}$.
4. Soit D la matrice définie par : $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $N = T - D$.
   (a) Déterminer pour tout entier $k \geq 2$, la matrice N^k.
   (b) Vérifier que $DN = ND$ et montrer que pour tout entier naturel n, on a :
   $$T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (c) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de la matrice A^n.
5. (a) Déduire des questions précédentes l'expression de u_n en fonction de n.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

6. Écrire un programme `Scilab` qui demande un entier naturel n à l'utilisateur, et qui renvoie le terme u_n.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

1. (a) Dresser le tableau de variation de f, limites comprises.

   (b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est parfaitement défini et strictement positif.

2. Les scripts suivants renvoient, pour celui de gauche, la valeur 5, et celui de droite, la valeur 6. Que sait-on de u_5 et u_6 ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

```
u=1
n=0
while u>0.00001
      u = exp(-u)/u
      n=n+1
end
disp(n)
```

```
u=1
n=0
while u<100000
      u = exp(-u)/u
      n=n+1
end
disp(n)
```

3. (a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = e^{-x} - x^2.$$

   (b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une seule solution, que l'on notera α, sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (c) Montrer que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.

4. (a) Établir les deux inégalités : $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$.

   (b) En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

5. On pose : $h(x) = \begin{cases} (f\circ f)(x) & ,\text{si } x > 0 \\ 0 & ,\text{si } x = 0 \end{cases}$

   (a) Déterminer $h(x)$ pour tout réel x strictement positif et vérifier que h est continue en 0.

   (b) Résoudre l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x élément de $\mathbb{R}_+$.

   (c) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

   (d) Montrer par l'absurde que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$.

Exercice 3

Les parties I et II sont largement indépendantes, seul le résultat de la question 5.(c) est utile pour la partie II.

Partie I : Calcul de la somme d'une série convergente.

1. À l'aide d'intégrations par parties successives, vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}.$$

2. Établir, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout t de $]0, \pi]$:
$$\frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} e^{it} = \frac{\sin \frac{tm}{2}}{\sin \frac{t}{2}} e^{\frac{i(m+1)t}{2}}, \quad \text{puis} \quad \sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \frac{\cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

3. Soit $u : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que :
$$\int_0^{\pi} u(t) \sin(\lambda t)\, dt \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. Soit l'application $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par :
$$f(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad \text{si } t \in]0, \pi] \quad \text{et} \quad f(0) = -1.$$
   (a) Montrer que f est continue sur $[0, \pi]$.
   (b) Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.
   (c) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

5. (a) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, exprimer $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$, $\sin(b)$. En déduire l'expression de $\sin(a)\cos(b)$ en fonction de $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$.
   (b) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right) \mathrm{d}t$.
   (c) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente.

1. (a) Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in ([0, +\infty[)^2$, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.
   (b) Montrer que, pour tout x de $[0, +\infty[$, la série $\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ converge.

   On note S l'application définie, pour tout x de $[0, +\infty[$, par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

2. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

3. (a) Etablir : $\forall (x, y) \in ([0, +\infty[)^2, \quad S(y) - S(x) = (y - x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$.
   (b) En déduire: $\forall (x, y) \in ([0, +\infty[)^2, \quad |S(y) - S(x)| \leq \frac{\pi^2}{6} |y - x|$.

(c) Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0,+\infty[$.

4. (a) Montrer, pour tout couple (x,y) de $([0,+\infty[)^2$ tel que $x \neq y$:

$$\left| \frac{S(y)-S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leqslant |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

(b) En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

(c) Préciser les valeurs de $S'(0)$ et $S'(1)$.

5. On admet que S est $\mathscr{C}^1$. Montrer que S est concave.

6. Soit $x \in]0,+\infty[$ fixé. On note φ la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par :

$$\forall t \in [1,+\infty[, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}.$$

(a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)\mathrm{d}t \leqslant \varphi(n)$. En déduire que :

$$\int_1^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t \leqslant S(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

(c) Conclure que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x+1)$. En déduire que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.

7. (a) Dresser le tableau de variation de S, en précisant la limite de S en $+\infty$.

(b) Tracer l'allure de la courbe représentative de S.