DS2

Correction du devoir surveillé

Problème (Ecricome 2012).

Partie I : Étude de deux endomorphismes

1. On vérifie les deux points suivants :

   - $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $g(P) \in \mathbb{R}_n[X]$: Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $g(P) = \big[(X-1)P\big]'$ est un polynôme et on a
   $$\deg\big((X-1)P\big) = \deg(X-1) + \deg P \leq 1 + n.$$
   Ainsi, $\deg\big((X-1)P\big)' \leq \deg\big((X-1)P\big) - 1 \leq n$, et $g(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
   Donc g définit une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.
   - Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   On a :
   $$\begin{aligned} g(\alpha P + \beta Q) &= (X-1)(\alpha P + \beta Q)' + (\alpha P + \beta Q) \\ &= (X-1)(\alpha P' + \beta Q') + \alpha P + \beta Q \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= \alpha\big((X-1)P' + P\big) + \beta\left((X-1)Q' + Q\right) = \alpha g(P) + \beta g(Q). \end{aligned}$$
   Donc g est linéaire.

   Par suite, $\boxed{g \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$.

2. On a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:
   $$\begin{aligned} f\big(g(P)\big)(x) &= \frac{1}{x-1}\int_1^x g(P)(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x-1}\int_1^x \big[(X-1)P\big]'(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x-1}\big[(t-1)P(t)\big]_1^x = \frac{1}{x-1}\big((x-1)P(x) - 0\big) = P(x). \end{aligned}$$
   De plus, on a $f\big(g(P)\big)(1) = g(P)(1) = (1-1)P'(1) + P(1) = P(1)$.

   Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\big(g(P)\big)(x) = P(x)$ soit encore $\boxed{f\big(g(P)\big) = P}$.

   Soit à présent $P \in \ker(g)$. On a $g(P) = 0$ donc $f\big(g(P)\big) = f(0) \underbrace{=}_{(*)} 0$.

   $(*)$ Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(0)(x) = \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x 0\mathrm{d}t = 0$ et $f(0)(1) = 0$.

   Par suite, $f\big(g(P)\big) = 0$. Or, $f\big(g(P)\big) = P$, donc on obtient $P = 0$.

   On a donc bien $\boxed{\ker(g) = \{0\}}$.

3. Comme $\ker(g) = \{0\}$, l'application linéaire g est injective. Or, g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension finie. On en déduit que g est bijective et donc $\boxed{g \text{ est un isomorphisme}}$ (ou automorphisme) de $\mathbb{R}_n[X]$.

   Comme g est un automorphisme, g^{-1} existe et on a pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:
   $$f(P) = f\big(g(g^{-1}(P))\big) = g^{-1}(P).$$
   Par suite $\boxed{g^{-1} = f}$. Or, g^{-1} est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ puisque c'est l'application réciproque de g linéaire, donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:
$$\begin{aligned} f(X^k)(x) &= \frac{1}{x-1}\int_1^x t^k \mathrm{d}t = \frac{1}{x-1}\Big[\frac{1}{k+1}t^{k+1}\Big]_1^x = \frac{1}{x-1}\frac{1}{k+1}(x^{k+1}-1) \\ &= \frac{1}{x-1}\frac{1}{k+1}(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^k) = \frac{1}{k+1}(1+x+x^2+\cdots+x^k). \end{aligned}$$
et $f(X^k)(1) = 1^k = 1 = \dfrac{1}{k+1}(1+1+1^2+\cdots+1^k)$. Ainsi,
$$f(X^k) = \frac{1}{k+1}(1+X+X^2+\cdots+X^k).$$
On en déduit la matrice A :
$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & 0 & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & (0) & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}.}$$
On a $g(1) = \big[(X-1)1\big]' = (X-1)' = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $g(X^k) = (X-1)kX^{k-1} + X^k = (k+1)X^k - kX^{k-1}$. On en déduit la matrice B :
$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & (0) & \vdots \\ \vdots & 0 & 3 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & & \ddots & n & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}.}$$

5. La famille $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ est libre en tant que famille de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ étagée en degrés. Elle est de plus de cardinal $n+1$ égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. Soit $r \in [\![0, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :
   - si $x \neq 1$,
   $$f(u_r)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x (t-1)^r dt = \frac{1}{x-1}\left[\frac{(t-1)^{r+1}}{r+1}\right]_1^x = \frac{1}{x-1}\left[\frac{(x-1)^{r+1}}{r+1}\right] = \frac{u_r(x)}{r+1}$$
   - si $x = 1$,
   $$f(u_r)(1) = u_r(1) = \begin{cases} 1 \text{ si } r = 0 \\ 0 \text{ si } r \neq 0 \end{cases} = \frac{u_r(1)}{r+1}.$$

   Ainsi on a $\boxed{f(u_r) = \dfrac{u_r}{r+1} \text{ pour tout } r \in \{0, 1, \ldots, n\}}$. On en déduit que :
$$\boxed{A' = M_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}.}$$

Puisque $g = f^{-1}$, on a :

$$\boxed{B' = (A')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n+1 \end{pmatrix}}.$$

7. Pour tout $s \in \{0, 1, \dots, n\}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$e_s(x) = x^s = ((x-1)+1)^s = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} (x-1)^r 1^{s-r}$$

en appliquant la formule du binôme de Newton. On obtient donc $\boxed{e_s = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} u_r}$. De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$u_r(x) = (x-1)^n = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} x^j.$$

On a donc $\forall r \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\boxed{u_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j}$.

8. On a $u_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j$ pour tout $r \in \{0, 1, \dots, n\}$. On peut donc compléter la matrice de passage :

$$\boxed{P = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & (-1)^n \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & \dots & (-1)^{n-1} \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}}$$

De même, comme $e_s = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} u_r$ pour tout $s \in \{0, 1, \dots, n\}$, on obtient :

$$\boxed{Q = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}}$$

Notons en passant que $Q = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}^{-1} = P^{-1}$.

9. A' étant une matrice diagonale, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{(A')^k = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{1}\right)^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \left(\frac{1}{n+1}\right)^k \end{pmatrix}}.$$

Par formule de changement de bases, on a :
$$A' = P^{-1}AP, \text{ d'où } A = PA'P^{-1} = PA'Q.$$
D'où pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient (par récurrence immédiate) :
$$A^k = P(A')^kQ.$$
Calculons :
$$A^k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P(A')^kQ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P(A')^k \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \frac{\binom{n}{0}}{1^k} \\ \frac{\binom{n}{1}}{2^k} \\ \vdots \\ \frac{\binom{n}{n}}{(n+1)^k} \end{pmatrix}$$
$$\boxed{= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\binom{r}{0}\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{\binom{r}{1}\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \\ \vdots \\ \frac{\binom{n}{n}\binom{n}{n}}{(n+1)^k} \end{pmatrix}}.$$
Or on a $M_{\mathscr{B}}(f^k(e_n)) = A^k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\binom{r}{0}\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{\binom{r}{1}\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \\ \vdots \\ \frac{\binom{n}{n}\binom{n}{n}}{(n+1)^k} \end{pmatrix}$. On en déduit donc que :
$$f^k(e_n) = \left(\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\binom{r}{0}\binom{n}{r}}{(r+1)^k}\right) e_0 + \left(\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{\binom{r}{1}\binom{n}{r}}{(r+1)^k}\right) e_1 + \cdots + \left(\frac{\binom{n}{n}\binom{n}{n}}{(n+1)^k}\right) e_n$$
$$\boxed{= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{r}{j}\binom{n}{r}}{(r+1)^k}\right) e_j}$$

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires

1. On a $\boxed{Z_0(\Omega) = \{n\}}$ car Z_0 est une variable aléatoire constante. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $Z_k(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$. En effet, on a :

   - $Z_k(\Omega) \subset \{0, 1, \ldots, n\}$ car les numéros tirés sont compris entre 0 et n,
   - toutes ces valeurs $j = 0, 1, \ldots, n$ peuvent bien être prises par Z_k, l'évènement $[Z_k = j]$ étant réalisé par exemple si on tire $n-1$ fois la boule n (toujours dans l'urne U_n donc) et 1 fois la boule j (dans l'urne U_n encore)

   Ainsi on a bien $\boxed{Z_k(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}}$.

   Z_1 correspond au numéro de la boule tirée lors du premier tirage. Or ce tirage se fait de manière équiprobable dans l'urne U_n qui contient $n+1$ boules numérotées de 0 à n. Ainsi on a $\boxed{Z_1 \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)}$. En particulier, on a :
$$\boxed{F_1 = \sum_{r=0}^{n} \frac{x^r}{r+1}}.$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{0, \dots, n\}$. On applique la formule des probabilités totales à l'évènement $[Z_{k+1} = r]$, avec pour système complet d'évènements $([Z_k = i])_{i=0,\dots,n}$:

$$P([Z_{k+1} = r]) = \sum_{i=0}^{n} P([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = r]).$$

Soit $0 \leq i \leq n$, et supposons $P([Z_k = i]) \neq 0$. Alors par la formule des probabilités composées, on a :

$$P([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = r]) = P([Z_k = i])P_{[Z_k=i]}([Z_{k+1} = r]) = \begin{cases} 0 \text{ si } i < r \\ \dfrac{P([Z_k = i])}{i+1} \text{ si } r \leq i \leq n \end{cases}.$$

Expliquons cette dernière égalité. Supposons $[Z_k = i]$ réalisé. Le tirage $k+1$ s'effectue alors dans l'urne U_i.

- Si $i < r$: l'évènement $[Z_{k+1} = r]$ ne peut se réaliser car il n'y a pas de boule r dans l'urne U_i. Donc $P_{[Z_k=i]}([Z_{k+1} = r]) = 0$ dans ce cas.
- Si $i \geq r$: dans ce cas il y a bien une boule numérotée r dans l'urne U_i, et la probabilité de l'obtenir est $\dfrac{1}{i+1}$ (cas équiprobable). Ainsi on a $P_{[Z_k=i]}([Z_{k+1} = r]) = \dfrac{1}{i+1}$.

On a ainsi montré que si $P([Z_k = i]) \neq 0$, alors

$$P([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = r]) = \begin{cases} 0 \text{ si } i < r \\ \dfrac{P([Z_k = i])}{i+1} \text{ si } r \leq i \leq n \end{cases}.$$

On obtient finalement que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $r \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a :

$$\boxed{P([Z_{k+1} = r]) = \sum_{i=0}^{n} P([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = r]) = \sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1}.}$$

Notons que cette formule est encore valable lorsque $k = 0$ car alors cela donne :

$$P(Z_1 = r) = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_0 = i)}{i+1} = \frac{P(Z_0 = n)}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

3. Pour établir $(\mathscr{R}_1)$, on prend $r = n$ dans l'égalité précédente :

$$P([Z_{k+1} = n]) = \sum_{i=n}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1} = \frac{P(Z_k = n)}{n+1}.$$

Ainsi on a bien pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{(\mathscr{R}_1) : \quad (n+1)P([Z_{k+1} = n]) = P([Z_k = n]).}$$

Prouvons maintenant la deuxième relation. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. On a :

$$\begin{aligned}(r+1)P(Z_{k+1} = r) - (r+1)P(Z_{k+1} = r+1) &= (r+1)\left(\sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1} - \sum_{i=r+1}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1}\right) \\ &\boxed{= (r+1)\frac{P(Z_k = r)}{r+1} = P(Z_r = r)}\end{aligned}$$

D'où la relation $(\mathscr{R}_2)$.

4. On somme la relation ($\mathscr{R}_1$) pour tous les entiers $k \in \mathbb{N}$. On obtient (tout converge par hypothèse) :

$$(n+1)\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_{k+1} = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = n) = S_n.$$

Ainsi, on a :

$$S_n = (n+1)\sum_{j=1}^{+\infty} P(Z_j = n) = (n+1)(S_n - P(Z_0 = n)) = (n+1)(S_n - 1).$$

D'où en résolvant $\boxed{S_n = \dfrac{n+1}{n}}$.

On suppose $n \geq 2$ dans la suite (pour pouvoir parler de S_{n-1}). On somme à présent les relations ($\mathscr{R}_2$) pour tous les entiers $k \in \mathbb{N}$ (tout converge par hypothèse) :

$$(r+1)\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_{k+1} = r) - (r+1)\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_{k+1} = r+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$$

On obtient :

$$(r+1)\left[S_r - (P(Z_0 = r)\right] - (r+1)\left[S_{r+1} - P(Z_0 = r+1)\right] = S_r \qquad (*)$$

Cette relation étant valable pour tout $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, on a pour $r = n-1$:

$$n\left[S_{n-1} - P(Z_0 = n-1)\right] - n\left[S_n - P(Z_0 = n)\right] = S_{n-1}$$

On en déduit donc, puisque $P(Z_0 = n-1) = 0$ et $P(Z_0 = n) = 1$ (car $Z_0 = n$), que :

$$nS_{n-1} - n(S_n - 1) = S_{n-1} \quad \Rightarrow \quad S_{n-1} = \frac{n}{n-1}(S_n - 1).$$

Puisque $S_n = \dfrac{n+1}{n}$, on a finalement $\boxed{S_{n-1} = \dfrac{n}{n-1}\left(\dfrac{n+1}{n} - 1\right) = \dfrac{1}{n-1}}$.

Montrons enfin que la suite $(rS_r)_{1 \leq r \leq n-1}$ est constante. On reprend la relation $(*)$ valable pour tout $r \in \{0, \ldots, n-1\}$. Pour $1 \leq r \leq n-2$, cette relation devient (puisqu'alors $P(Z_0 = r) = P(Z_0 = r+1) = 0$ car $Z_0 = n$) :

$$(r+1)S_r - (r+1)S_{r+1} = S_r \quad \text{soit encore} \quad rS_r = (r+1)S_{r+1}.$$

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (rS_r)_{1 \leq r \leq n-1} \text{ est constante.}}$

Remarque. Ce n'était pas demandé, mais on obtient pour tout $r \in [\![1, n-1]\!]$:

$$rS_r = (n-1)S_{n-1} = 1 \quad \text{soit} \quad S_r = \frac{1}{r}.$$

5. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
(x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) &= (x-1)\sum_{r=1}^{n} rP(Z_{k+1}=r)x^{r-1} + \sum_{r=0}^{n} P(Z_{k+1}=r)x^r \\
&= \sum_{r=1}^{n} rP(Z_{k+1}=r)x^{r} - \sum_{r=1}^{n} rP(Z_{k+1}=r)x^{r-1} + \sum_{r=0}^{n} P(Z_{k+1}=r)x^r \\
&= \sum_{r=0}^{n} rP(Z_{k+1}=r)x^{r} - \sum_{r=0}^{n-1} (r+1)P(Z_{k+1}=r+1)x^{r} + \sum_{r=0}^{n} P(Z_{k+1}=r)x^r \\
&= \sum_{r=0}^{n-1} \left[rP(Z_{k+1}=r)x^{r} - (r+1)P(Z_{k+1}=r+1)x^{r} + P(Z_{k+1}=r)x^r\right] \\
&\quad + nP(Z_{k+1}=n)x^n + P(Z_{k+1}=n)x^n \\
&= \sum_{r=0}^{n-1} \left[(r+1)P(Z_{k+1}=r)x^{r} - (r+1)P(Z_{k+1}=r+1)\right]x^{r} \\
&\quad + (n+1)P(Z_{k+1}=n)x^n \\
&\underbrace{=}_{(\mathscr{R}_1)\text{ et }(\mathscr{R}_2)} \sum_{r=0}^{n-1} P(Z_k=r)x^r + P(Z_k=n)x^n = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k=r)x^r = F_k(x)
\end{aligned}$$

On obtient bien la relation suivante pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{(\mathcal{S}) :\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ (x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).}$$

6. (a) Notons tout d'abord que les variables aléatoires Z_k et $Z_k(Z_k-1)$ sont finies, donc elles possèdent bien une espérance.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction F_k est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en tant que polynôme. On peut donc la dériver deux fois. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'_k(x) = \sum_{r=1}^{n} rP(Z_k=r)x^{r-1}, \quad F''_k(x) = \sum_{r=2}^{n} r(r-1)P(Z_k=r)x^{r-2}.$$

Prenons $x=1$ dans ces deux expressions :

$$F'_k(1) = \sum_{r=1}^{n} rP(Z_k=r) = \sum_{r=0}^{n} rP(Z_k=r), \quad F''_k(x) = \sum_{r=2}^{n} r(r-1)P(Z_k=r) = \sum_{r=0}^{n} r(r-1)P(Z_k=r).$$

On obtient par le théorème de transfert :

$$\boxed{E(Z_k) = F'_k(1)} \text{ et } \boxed{E(Z_k(Z_k-1)) = F''_k(1)}.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a les relations suivantes, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(\mathscr{S})&\ \ (x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x), \\
(\mathscr{S}')&\ \ (x-1)F''_{k+1}(x) + 2F'_{k+1}(x) = F'_k(x), \\
(\mathscr{S}'')&\ \ (x-1)F'''_{k+1}(x) + 3F''_{k+1}(x) = F''_k(x),
\end{aligned}$$

où les relations $(\mathscr{S}')$ et $(\mathscr{S}'')$ sont obtenues en dérivant $(\mathscr{S})$. Prenons alors $x=1$ dans ces relations, on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
(\mathscr{S}') &\Rightarrow 2F'_{k+1}(1) = F'_k(1), \\
(\mathscr{S}'') &\Rightarrow 3F''_{k+1}(1) = F''_k(1).
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{F'_{k+1}(1) = \frac{1}{2}F'_k(1)}$ et $\boxed{F''_{k+1}(1) = \frac{1}{3}F''_k(1)}$.

(c) Ce sont des suites géométriques de raison $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ respectivement. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$F_k'(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^k F_0'(1) \text{ et } F_k''(1) = \left(\frac{1}{3}\right)^k F_0''(1).$$

Or $F_0(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_0 = r)x^r = P(Z_0 = n)x^n = x^n$. Donc $F_0'(1) = n$ et $F_0''(n) = n(n-1)$. On obtient finalement :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad F_k'(1) = \frac{n}{2^k} \quad \text{et} \quad F_k''(1) = \frac{n(n-1)}{3^k}.}$$

La variance $V(Z_k)$ de Z_k existe bien car Z_k est une variable aléatoire finie. On obtient en utilisant les calculs précédents que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} V(Z_k) &= E(Z_k^2) - E(Z_k)^2 = E(Z_k(Z_k-1)) + E(Z_k) - E(Z_k)^2 \\ &= F_k''(1) + F_k'(1) - F_k'(1)^2 = \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \left(\frac{n}{2^k}\right)^2 \\ &= \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \frac{n^2}{4^k} \end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad E(Z_k) = \frac{n}{2^k} \quad \text{et} \quad \boxed{V(Z_k) = \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \frac{n^2}{4^k}}.$$

Partie III : Loi de chacune de ces variables aléatoires

1. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)x^r$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit avec les notations de l'énoncé :

$$\boxed{F_k = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)e_r.}$$

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(F_k) = F_{k+1}$. Par une récurrence immédiate, on montre que :

$$F_k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}(F_0) = f^k(F_0).$$

Or $F_0(x) = x^n$ (car $Z_0 = n$ constante), donc on a bien finalement :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ F_k = f^k(e_n).}$$

2. D'après la question précédente et la question I.9., on obtient donc :

$$f^k(e_n) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)e_r \quad \text{et} \quad f^k(e_n) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{r=j}^{n} \left((-1)^{r-j}\frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}\right) e_j.$$

Reste alors à identifier chacun des coefficients de ces deux expressions (l'écriture dans la base $(e_0, \ldots, e_n)$ étant unique) :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall j \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n}(-1)^{r-j}\frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.}$$

3. (a) Soit $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
|P(Z_k = j)| &= |\sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}| \\
&\leq \sum_{r=j}^{n} |(-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}| \quad \text{par inégalité triangulaire} \\
&\leq \sum_{r=j}^{n} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k} \\
&\leq \sum_{r=j}^{n} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(j+1)^k} \quad \text{car} \quad \frac{1}{r+1} \leq \frac{1}{j+1} \\
&\leq \frac{\displaystyle\sum_{r=j}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(j+1)^k}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ et $k \in \mathbb{N}$ que :

$$\boxed{|P(Z_k = j)| \leq \frac{M_{j,n}}{(j+1)^k}}$$

avec $M_{j,n} = \displaystyle\sum_{r=j}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{j}$.

Soit $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. La série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \frac{M_{j,n}}{(j+1)^k}$ est (à une constante $M_{j,n}$ près) une série géométrique de raison $0 < \dfrac{1}{j+1} < 1$. Elle converge donc. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} |P(Z_k = j)|$ converge.

Comme pour tout $k \geq 0$, $P(Z_k = j) \geq 0$, on peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{k \geq 0} P(Z_k = j) \text{ converge lorsque } j \in \{1, 2, \ldots, n\}.}$$

(b) On a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(Z_k = 0) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{0}}{(r+1)^k} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} = 1 + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
|P(Z_k = 0) - 1| &= |\sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}| \\
&\leq \sum_{r=1}^{n} |(-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}| \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\
&\leq \sum_{r=1}^{n} \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \\
&\leq \sum_{r=1}^{n} \frac{\binom{n}{r}}{2^k} \quad \text{car } \frac{1}{r+1} \leq \frac{1}{2} \\
&\leq \frac{\displaystyle\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}}{2^k}
\end{aligned}$$

Rappelons enfin que $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} 1^r 1^{n-r} = 2^n$. On obtient finalement pour $C_n = 2^n$ que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ |P(Z_k = 0) - 1| \leq \frac{C_n}{2^k}}$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient par théorème d'encadrement que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} P(Z_k = 0) = 1$. $\boxed{\text{La série } \displaystyle\sum_{k\geq 0} P(Z_k = 0) \text{ est donc grossièrement divergente.}}$

Remarque. On a donc montré que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} P(Z_k = 0) = 1$, ce qui signifie que la suite de variables aléatoires (Z_k) converge dans un certain sens à définir (convergence en loi, voir **Chapitre 17 - Convergence de variables aléatoires.**) vers la variable aléatoire constante égale à 0. Ceci ne devrait pas vous surprendre, car Z_k représente le numéro de la boule piochée au k-ème tirage. Étant donné le protocole et la composition des urnes, on a $Z_{k+1} \leq Z_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et si on tombe dans l'urne U_0 (c'est à dire s'il existe $r \geq 0$ tel que $Z_r = 0$), alors on ne peut plus en sortir vu le protocole suivi (et donc $Z_s = 0$ pour tout $s \geq r$).
