DS2

Devoir Surveillé du 16/10/2019

Durée : 2h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Problème.

L'objectif du problème est d'étudier une suite de variables aléatoires $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Les deux premières parties sont indépendantes et la troisième utilise certains résultats obtenus dans les deux premières parties.

La partie I est consacrée à l'étude de deux endomorphismes sur $\mathbb{R}_n[X]$.

La partie II consiste à calculer l'espérance et la variance de Z_k ainsi qu'à calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$ sous réserve de convergence.

La partie III fournira la loi de Z_k ainsi que l'étude de la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} P(Z_k = r)$.

Partie I : Étude de deux endomorphismes.

Soit n un entier naturel. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à cœfficients réels de degré au plus n.

Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on désigne par e_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $e_k = X^k$.

Rappelons que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit les fonctions $f(P)$ et $g(P)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f(P)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\mathrm{d}t \ \text{ et } \ f(P)(1) = P(1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(P)(x) = [(X-1)P]'(x) = (x-1)P'(x) + P(x).$$

1. Prouver que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Calculer $f(g(P))$ puis justifier que $\ker(g) = \{0\}$.

3. Démontrer que g est un isomorphisme, que $g^{-1} = f$ et que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Écrire la matrice A de f dans la base $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ ainsi que la matrice B de g dans cette même base.

5. Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ on désigne par u_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $u_k = (X-1)^k$.

   Prouver que $\mathscr{C} = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. Calculer $f(u_r)$ pour $r \in \{0, 1, \dots, n\}$. En déduire la matrice A' de f dans la base $\mathscr{C} = (u_0, u_1, \dots, u_n)$, ainsi que la matrice B' de g dans cette même base.

7. Justifier que : $\forall s \in \{0,1,\ldots,n\},\ e_s = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} u_r$

   et que : $\forall r \in \{0,1,\ldots,n\},\ u_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j$.

8. Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$, puis la matrice de passage Q de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$.

9. Déterminer $(A')^k$, puis calculer $A^k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k(e_n) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k} \right) e_j.$$

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose de $n+1$ urnes notées $U_0, U_1, \ldots, U_n$ et on suppose que pour tout $i \in \{0,\ldots,n\}$, l'urne U_i contient $i+1$ boules numérotées $0, 1, \ldots, i$.

On s'intéresse au jeu suivant :

- Au premier tirage, on pioche une boule dans l'urne U_n. Si la boule porte le numéro r alors on repose la boule dans l'urne U_n puis le tirage suivant s'effectue dans l'urne U_r.
- Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, si la boule numéro s a été piochée au k-ième tirage dans une certaine urne, on repose cette boule dans la même urne puis on effectue le $(k+1)$-ième tirage dans l'urne U_s.

Pour tout entier naturel k, on note :

- Z_k est la variable aléatoire égale au numéro de la boule piochée au k-ième tirage.
  On convient que $Z_0 = n$.
- F_k est le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r) x^r$.
- $E(Z_k)$ désigne l'espérance de la variable aléatoire Z_k.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $Z_k(\Omega)$.

   Que dire de la loi de Z_1 ? En déduire l'expression de F_1.

2. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in \{0,1,\ldots,n\}, \quad P(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1}.$$

3. Établir les formules suivantes valables pour tous entiers $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$:

$$(\mathcal{R}_1) : \quad (n+1)P(Z_{k+1} = n) = P(Z_k = n)$$
$$(\mathcal{R}_2) : \quad (r+1)P(Z_{k+1} = r) - (r+1)P(Z_{k+1} = r+1) = P(Z_k = r).$$

4. On admet dans cette question que la série $\sum_{k \geq 0} P(Z_k = r)$ converge pour tout $r \in \{1, \dots, n\}$ et on pose $S_r = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$.
En sommant les relations $(\mathcal{R}_1)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_n.
En sommant les relations $(\mathcal{R}_2)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_{n-1} et montrer que la suite $(rS_r)_{1 \leq r \leq n-1}$ est constante.

5. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer la relation :

$$(\mathcal{S}) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).$$

6. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Établir que $F'_k(1) = E(Z_k)$ et $F''_k(1) = E(Z_k(Z_k - 1))$.
   (b) En dérivant une fois puis deux fois la relation $(\mathcal{S})$, donner la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F'_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$ ainsi que la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F''_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$.
   (c) Donner la valeur de $F'_k(1)$ et de $F''_k(1)$ en fonction de k et n.
   Expliciter alors la variance $V(Z_k)$ de Z_k en fonction de k et n.

Partie III : Loi de chacune de ces variables aléatoires.

On reprend toutes les notations des parties I et II et on pourra admettre tous les résultats établis dans ces deux parties.
Rappelons également qu'à la question II.4 la relation $(\mathcal{S})$ est démontrée ce qui revient à écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g(F_{k+1}) = F_k, \qquad \text{soit encore} \qquad f(F_k) = F_{k+1}.$$

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \ \sum_{j=0}^{n} P(Z_k = j)e_j = F_k = f^k(e_n)$.

2. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. À l'aide des résultats obtenus à la partie I, établir que :

$$P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

3. Application.
   (a) Soit $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Déterminer un réel $M_{j,n}$ tel que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \ |P(Z_k = j)| \leq \frac{M_{j,n}}{(j+1)^k}$$
   puis justifier que la série $\sum_{k \geq 0} P(Z_k = j)$ converge lorsque $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
   (b) Déterminer un réel C_n tel que : $\forall k \in \mathbb{N}, \ |P(Z_k = 0) - 1| \leq \dfrac{C_n}{2^k}$.
   La série $\sum_{k \geq 0} P(Z_k = 0)$ est-elle convergente ?