DS3

Correction du devoir surveillé

Exercice 1 (Extrait de EM Lyon 2001)

Partie I : Étude d'un exemple

1. En utilisant la matrice, on a que $f(e_1) = e_1 + e_2 - 2e_3$ et :

$$f^2(e_1) = f(e_1 + e_2 - 2e_3) = (e_1 + e_2 - 2e_3) + (2e_1 + e_2 - 2e_3) - 2(2e_1 + 2e_2 - 3e_3) = -e_1 - 2e_2 + 2e_3.$$

Puique $\mathscr{B}' = \big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\big)$ est de cardinal 3, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
\alpha e_1 + \beta f(e_1) + \gamma f^2(e_1) = 0_E &\Rightarrow \alpha e_1 + \beta(e_1 + e_2 - 2e_3) + \gamma(-e_1 - 2e_2 + 2e_3) = 0_E \\
&\Rightarrow (\alpha + \beta - \gamma)e_1 + (\beta - 2\gamma)e_2(-2\beta + 2\gamma)e_3 = 0_E \\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ -2\beta + 2\gamma \end{cases} \qquad \text{par liberté de la famille } (e_1, e_2, e_3) \\
&\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une famille libre de cardinal 3 de E, avec $\dim(E) = 3$. $\boxed{\text{C'est donc une base de } E.}$

Remarque. On pouvait aussi procéder matriciellement, en montrant que $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, A^2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

Pour déterminer la matrice de f dans $\mathscr{B}'$, il nous reste à calculer :

$$\begin{aligned}
f(f^2(e_1)) &= -f(e_1) - 2f(e_2) + 2f(e_3) = -(e_1 + e_2 - 2e_3) - 2(2e_1 + e_2 - 2e_3) + 2(2e_1 + 2e_2 - 3e_3) \\
&= -e_1 + e_2 = -e_1 - f(e_1) - f^2(e_1).
\end{aligned}$$

On en déduit que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est $\boxed{M_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.}$

2. Comme on vient de le voir par le calcul, les vecteurs de la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ sont bien deux à deux distincts. De plus cette famille est une sur-famille de $\mathscr{B}'$ qui est génératrice (puisque c'est une base). La famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est donc génératrice.

Reste enfin à calculer $f^4(e_1)$:

$$f^4(e_1) = f(f^3(e_1)) = f(-e_1 + e_2) = e_1.$$

Donc $\boxed{f \text{ est cyclique d'ordre 4 et que } \big(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)\big) \text{ est un cycle de } f.}$

3. Plusieurs méthodes sont ici possibles : montrer que $A^4 = I_3$, ou $M_{\mathscr{B}'}(f)^4 = I_3$. On peut aussi procéder comme suit, idée qui sera reprise plus loin dans le sujet : on a déjà $f^4(e_1) = e_1$. On en déduit alors que :

$$f^4(f(e_1)) = f(f^4(e_1)) = f(e_1), \quad f^4(f^2(e_1)) = f^2(f^4(e_1)) = f^2(e_1).$$

Ainsi f^4 coïncide avec l'identité sur la base $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ de E. Ces deux endomorphismes sont donc égaux. On en déduit que $\boxed{f^4 = Id_E \text{ et que } X^4 - 1 \text{ est un polynôme annulateur de } f.}$

Partie II : Cas général

Soit $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ un cycle de f.

1. Puisque $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ un cycle de f, c'est en particulier une partie génératrice de E, de sorte que son cardinal est supérieur à la dimension n de l'espace E. Ainsi on a bien $\boxed{p \geq n}$.

2. On reprend la même idée que dans la question I.3. Pour tout $0 \leq k \leq p-1$, on a :
$$f^p(f^k(x_0)) = f^k(f^p(x_0)) = f^k(x_0)$$
car $f^p(x_0) = x_0$ puisque f est cyclique d'ordre p. Les endomorphismes f^p et id_E coïncident sur la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ qui est génératrice de E (car c'est un cycle de f). Montrons qu'alors $f^p = id_E$: pour tout $x \in E$, il existe des scalaires $\lambda_0, \ldots \lambda_{p-1}$ tels que
$$x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0)$$
car $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ est génératrice de E. On en déduit par linéarité de f^p que :
$$\begin{aligned} f^p(x) &= \lambda_0 f^p(x_0) + \lambda_1 f^p(f(x_0)) + \cdots + \lambda_{p-1} f^p(f^{p-1}(x_0)) \\ &= \lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0) = x \end{aligned}$$
Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on en déduit bien que $\boxed{f^p = id_E}$.

Puisque $f^p = id_E = f \circ f^{p-1} = f^{p-1} \circ f$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est bijective et que } f^{-1} = f^{p-1}}$.

3. (a) Par définition de l'entier m, la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$ est libre, et la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0), f^m(x_0)\big)$ est liée. Il existe donc des scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ **non tous nuls** tels que :
$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{m-1} f^{m-1}(x_0) + \lambda_m f^m(x_0) = 0_E. \qquad (*)$$
Supposons $\lambda_m = 0$. Alors on aurait :
$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{m-1} f^{m-1}(x_0) = 0_E.$$
Par liberté de la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$, on aurait alors :
$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$$
ce qui est contradictoire avec $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ non tous nuls. Ainsi on a $\lambda_m \neq 0$, et en reprenant $(*)$:
$$f^m(x_0) = \frac{-\lambda_0}{\lambda_m} x_0 + \frac{-\lambda_1}{\lambda_m} f(x_0) + \cdots + \frac{-\lambda_{m-1}}{\lambda_m} f^{m-1}(x_0).$$
Donc $\boxed{f^m(x_0) \text{ est bien combinaison linéaire des } m \text{ vecteurs } x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0).}$

(b) Montrons par récurrence, que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à m, le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$.

Init. Pour $k = m$, c'est le résultat de la question précédente. Donc la propriété est vraie au rang m.

Hér. Soit $k \geq m$ fixé. Supposons que $f^k(x_0)$ soit combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$. Il existe donc des scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}$ tels que :
$$f^k(x_0) = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{m-2} f^{m-2}(x_0) + \lambda_{m-1} f^{m-1}(x_0).$$
On obtient en composant par f linéaire :
$$\begin{aligned} f^{k+1}(x_0) &= \underbrace{\lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f^2(x_0) + \cdots + \lambda_{m-2} f^{m-1}(x_0)}_{\in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))} + \underbrace{\lambda_{m-1} f^m(x_0)}_{\in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)) \text{ d'après 3.(a)}} \\ &\in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)) \end{aligned}$$
D'où la propriété au rang $k+1$.

Concl. On conclut par principe de récurrence que : $\boxed{\forall k \geq m, \quad f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)).}$
Notons en passant que cette propriété est aussi trivialement vérifiée pour $0 \leq k \leq m-1$.

(c) La famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$ est libre par hypothèse. Montrons qu'elle est aussi génératrice. f étant cyclique d'ordre p, on sait que la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$. Or par la question précédente, on a :
$$\forall k \in [\![0, p-1]\!], \quad f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$$
$$\Rightarrow \quad E = \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)) \subset \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)).$$
Ainsi $\mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)) = E$ et la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$ est génératrice. $\boxed{\text{C'est donc une base de } E.}$

Une base étant de cardinal égal à la dimension, on obtient ici $\boxed{m = n.}$

4. On note $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ les n nombres complexes tels que :

$$f^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + a_2 f^2(x_0) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0)$$

Notons que de tels complexes $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ existent bien puisque $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

(a) On a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} g(f^k(x_0)) &= a_0 f^k(x_0) + a_1 f(f^k(x_0)) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(f^k(x_0)) \\ &= a_0 f^k(x_0) + a_1 f^k(f(x_0)) + \cdots + a_{n-1} f^k(f^{n-1}(x_0)) \\ &= f^k(a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + a_2 f^2(x_0) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0)) = f^k(f^n(x_0)) \boxed{= f^{k+n}(x_0)} \end{aligned}$$

On en déduit en particulier que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad g(f^k(x_0)) = f^n(f^k(x_0)).$$

Les endomorphismes g et f^n coïncident donc sur la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$. Ils sont donc égaux, de sorte que $\boxed{f^n = a_0 id_E + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}.}$

(b) Pour tout $0 \leq k \leq n-2$, on a $f(f^k(x_0)) = f^{k+1}(x_0)$, et :

$$f(f^{n-1}(x_0)) = f^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + a_2 f^2(x_0) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0).$$

La matrice M associée à f relativement à la base $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$ est donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.}$$

Déjà vu ?
On reconnait ici la matrice compagnon du polynôme $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1 X - a_0$ rencontrée dans le TD9 - Vecteurs propres, valeurs propres.

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. La matrice de $f - \lambda id_E$ dans la base $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$ est :

$$M - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Les $n-1$ premiers vecteurs colonnes de $M - \lambda I_n$ forment une famille échelonnée, donc libre. On en déduit que $\boxed{\mathrm{rg}(f - \lambda id_E) = \mathrm{rg}(M - \lambda I_n) \geq n-1}$.

Par le théorème du rang, on obtient enfin :

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda id_E)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f - \lambda id_E) \leq n-1.}$$

Remarque. On a ainsi montré que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de f, alors $\dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda id_E)) = 1$.

Exercice 2 (Edhec 2001)

1. X et Y étant des variables finies, $\mathrm{Cov}(X,Y)$ existe, et on a par la formule de Huygens :
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$
X et Y suivant des lois de Bernoulli, on a $E(X) = P(X=1)$ et $E(Y) = P(Y=1)$. D'autre part, XY ne prend que les valeurs 0 et 1. Elle suit donc une loi de Bernoulli également, de sorte que :
$$E(XY) = P(XY=1) = P(X=1,\, Y=1).$$
Ainsi on a bien :
$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = P([X=1]\cap[Y=1]) - P(X=1)P(Y=1).}$$

2. (a) On retire une boule de l'urne à chaque tirage impair. Comme il y a n boules dans l'urne initialement, il faudra n tirages impairs pour toutes les retirer. Le nombre total de tirages effectués lors de cette épreuve est donc $\boxed{N = 2n-1}$.

   Plus en détail si cet argument ne vous parle pas :
   - au tirage $1 = 2\times 1 - 1$, il reste $n-1$ boules dans l'urne ;
   - au tirage $3 = 2\times 2 - 1$, il reste $n-2$ boules dans l'urne ;
   - au tirage $2j-1$, il reste $n-j$ boules dans l'urne.
   - au tirage $N = 2\times n - 1$, il reste donc $n-n=0$ boules dans l'urne.

   (b) Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$. On l'a vu précédemment, il reste $\boxed{n-j \text{ boules dans l'urne avant le } (2j)\text{-ième tirage}}$. Comme on fait un tirage avec remise au $(2j)$-ième tirage, il reste toujours $\boxed{n-j \text{ boules dans l'urne avant le } (2j+1)\text{-ième tirage}}$.

3. (a) Lors du premier tirage, il y a une chance sur n d'obtenir la boule noire, et donc $\boxed{P(X_1=1) = \frac{1}{n}}$.

   On va utiliser la formule des probabilités totales pour calculer $P(X_2=1)$. Avec le SCE $([X_1=0],[X_1=1])$, on a :
$$P(X_2=1) = P(X_1=0)P_{[X_1=0]}(X_2=1) + P(X_1=1)P_{[X_1+1]}(X_2=1).$$
   Or $P_{[X_1+1]}(X_2=1) = 0$ car le tirage 1 se fait sans remise, et que la boule noir ne peut donc pas être obtenue au tirage 2 sachant qu'elle a été obtenue au tirage 1.

   D'autre part, si la boule noir n'a pas été obtenue au premier tirage, il reste donc au deuxième tirage $n-1$ boules dans l'urne dont une boule noire qui est obtenue avec probabilité $\frac{1}{n-1}$. Ainsi on a $P_{[X_1=0]}(X_2=1) = \frac{1}{n-1}$.

   On obtient donc : $\quad P(X_2=1) = P(X_1=0)P_{[X_1=0]}(X_2=1) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n-1}\boxed{=\frac{1}{n}}$.

   (b) Soit $j\in[\![1,n-1]\!]$. La boule noire est tirée au $(2j+1)$-ième tirage si et seulement si elle n'a pas été obtenue aux tirages $1,3,\dots,2j-1$ (qui ont tous donnés une boule blanche) et qu'elle a été obtenue au tirage $2j+1$, de sorte que :
$$[X_{2j+1}=1] = [X_1=0]\cap[X_3=0]\cap\dots[X_{2j-1}=0]\cap[X_{2j+1}=1].$$
   Ces évènements n'étant pas deux à deux indépendants (du fait des tirages sans remise), on applique la formule des probabilités composées. On obtient :
$$\begin{aligned}P(X_{2j+1}=1) &= P\left([X_1=0]\cap\dots\cap[X_{2j-1}=0]\cap[X_{2j+1}=1]\right)\\ &= P(X_1=0)P_{[X_1=0]}(X_3=0)\dots P_{[X_1=0]\cap\dots\cap[X_{2j-3}=0]}(X_{2j-1}=0)P_{[X_1=0]\cap\dots\cap[X_{2j-1}=0]}(X_{2j+1}=1)\\ &= \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-j}{n-j+1}\frac{1}{n-j}\boxed{=\frac{1}{n}.}\end{aligned}$$
   De même, on a :
$$\begin{aligned}P(X_{2j}=1) &= P\left([X_1=0]\cap\dots\cap[X_{2j-1}=0]\cap[X_{2j}=1]\right)\\ &= P(X_1=0)P_{[X_1=0]}(X_3=0)\dots P_{[X_1=0]\cap\dots\cap[X_{2j-3}=0]}(X_{2j-1}=0)P_{[X_1=0]\cap\dots\cap[X_{2j-1}=0]}(X_{2j}=1)\\ &= \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-j}{n-j+1}\frac{1}{n-j}\boxed{=\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

(c) Puisque les X_k sont des variables aléatoires ne prenant que les valeurs 0 et 1, elles suivent donc toutes une loi de Bernoulli de paramètre $P(X_k = 1) = \dfrac{1}{n}$. Ainsi on a $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1, 2n-1]\!],\ X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(\tfrac{1}{n}).}$

4. Pour tout j élément de $[\![1, n]\!]$, on note U_j l'événement : « On obtient la boule noire pour la première fois au $(2j-1)$-ième tirage ».

(a) Au $(2n-3) = 2(n-1)-1$-ième tirage, il reste $n-(n-1)$ boules dans l'urne. Ainsi, il reste une seule boule dans l'urne avant le $(2n-2)$-ième tirage. Comme ce tirage se fait avec remise, c'est cette boule qui est obtenue au $(2n-2)$-ième tirage et aussi au $(2n-1)$-ième tirage.

Si U_n est réalisée, alors cela signifie qu'on a obtenu pour la première fois la boule noire au tirage $(2n-1)$. Or c'est aussi cette boule noire qui est tirée au tirage $(2n-2)$ d'après ce qui vient d'être noté. L'évènement U_n est donc impossible, de sorte que $\boxed{P(U_n) = 0}$.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a l'égalité d'évènements :

$$U_j = [X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] \cap [X_3 = 0] \cap \ldots \cap [X_{2j-3} = 0] \cap [X_{2j-2} = 0] \cap [X_{2j-1} = 1].$$

Ces évènements n'étant pas indépendants, on applique la formule des probabilités composée :

$$\begin{aligned}
P(U_j) &= P\left([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] \cap [X_3 = 0] \cap \ldots \cap [X_{2j-3} = 0] \cap [X_{2j-2} = 0] \cap [X_{2j-1} = 1]\right) \\
&= P(X_1 = 0) P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) P_{[X_1=0]\cap[X_2=0]}(X_3 = 0) \ldots P_{\bigcap_{k=1}^{2j-3} [X_k=0]}(X_{2j-2} = 0) P_{\bigcap_{k=1}^{2j-2} [X_k=0]}(X_{2j-1} = 1) \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n-(j-1)}{n-(j-1)+1} \frac{n-(j-1)-1}{n-(j-1)} \frac{1}{n-j+1} \\
&= \frac{(n-1)\,(n-2)^2(n-3)^2 \ldots (n-j+1)^2(n-j)}{n(n-1)^2(n-2)^2 \ldots (n-j+2)^2(n-j+1)^2} \boxed{= \frac{n-j}{n(n-1)}}
\end{aligned}$$

(b) Si on tire la boule noire à un tirage de rang pair, on la remet dans l'urne, et donc on est certain de la tirer une seconde fois puisqu'on finit par vider l'urne.

D'autre part, si on tire la boule noire pour la première fois à un rang impair, on ne la remet pas dans l'urne et on l'a donc tirée une unique fois.

On en déduit que $\boxed{[X = 1] = \bigcup_{i=1}^{n} U_i}$.

Puisqu'il s'agit d'une union d'événements deux à deux incompatibles, on obtient :

$$P(X = k) = \sum_{i=1}^{n} P(U_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2n(n-1)} = \frac{1}{2}.$$

(c) Dès qu'on tire la boule noire à un rang impair, on ne la remet pas dans l'urne. Donc pour que $[X = n]$ soit réalisé, il faut nécessairement obtenir la boule noire à $(n-1)$ tirages d'ordre pair, et lors d'un tirage d'ordre impair (puisqu'il faut bien qu'à un moment, la boule soit retirée de l'urne).

Or on effectue exactement $n-1$ tirages de rang pair : les tirages d'ordre $2, 4, \ldots, 2n-2 = 2(n-1)$. On en déduit que pour obtenir exactement n fois la boule noire, on doit tirer la boule noire à tous les rangs pairs, et une seule fois à un tirage de rang impair, le rang $2n-1$. Tous les autres tirages impairs donnent alors nécessairement une boule blanche. On a donc l'égalité d'évènements suivante :

$$[X = n] = [X_1 = 0] \cap [X_2 = 1] \cap [X_3 = 0] \cap [X_4 = 1] \cap \ldots [X_{2n-4} = 1] \cap [X_{2n-3} = 0] \cap [X_{2n-2} = 1] \cap [X_{2n-1} = 1].$$

De même que précédemment, en utilisant la formule des probabilités composées, on obtient :

$$\begin{aligned}
P(X = n) &= P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1] \cap \ldots [X_{2n-4} = 1] \cap [X_{2n-3} = 0] \cap [X_{2n-2} = 1] \cap [X_{2n-1} = 1]) \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{1}{n-1} \frac{n-2}{n-1} \frac{1}{n-2} \cdots \frac{1}{n-(n-2)} \frac{n-(n-1)}{n-(n-1)+1} \frac{1}{n-(n-1)} \frac{1}{n-(n)+1} \\
&= \frac{(n-1)!}{n(n-1)^2(n-2)^2 \ldots 2^2 1^2} = \frac{(n-1)!}{n(n-1)!^2} \boxed{= \frac{1}{n!}}
\end{aligned}$$

5. Puisque X_k vaut 1 si la boule noire est apparue au tirage d'ordre k, et zéro si elle n'est pas apparue, le nombre de fois où la boule noire apparait est donc $\sum_{k=1}^{2n-1} X_k$. Ainsi on a $\boxed{X = \sum_{k=1}^{2n-1} X_k.}$ Par linéarité de l'espérance, $E(X)$ existe et on a :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{2n-1} E(X_k) = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{n} \boxed{= \frac{2n-1}{n}}$$

car on a vu que $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$.

6. Soit i un entier naturel compris entre 0 et $n-2$.

   (a) Si la boule noire a été obtenue au tirage d'ordre $2i+1$ impair, elle a donc été retirée de l'urne et ne peut plus réapparaitre. Donc on a :

$$\forall j \in [\![1, 2n-2i-2]\!], \quad P_{[X_{2i+1}=1]}(X_{2i+j+1} = 1) = 0.$$

   (b) Puisque X_{2i+1} et X_{2i+j+1} suivent des lois de Bernoulli, on peut appliquer la question 1 :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_{2i+1}, X_{2i+j+1}) &= P([X_{2i+1} = 1] \cap [X_{2i+j+1} = 1]) - P([X_{2i+1} = 1])P([X_{2i+j+1} = 1]) \\ &= P(X_{2i+1} = 1)P_{[X_{2i+1}=1]}(X_{2i+j+1} = 1) - \frac{1}{n^2} \boxed{= -\frac{1}{n^2}.} \end{aligned}$$

7. Soit i un entier naturel compris entre 1 et $n-1$.

   (a) Sachant que $[X_{2i} = 1]$ est réalisé, c'est qu'à l'issue du $(2i)$-ième tirage (qui se fait avec remise), la boule noire est toujours dans l'urne. Autrement dit, celle-ci contient une boule noire et $n-i-1$ boules blanches. Et donc, selon le même raisonnement qu'à la question 3.(b), la probabilité qu'au $(2k)$-ième tirage suivant le $(2j)$-ième, on obtient une boule noire est de $\frac{1}{n-i}$. Ainsi on a :

$$\boxed{P_{[X_{2i}=1]}(X_{2i+2k} = 1) = \frac{1}{n-i}.}$$

   (b) Le même raisonnement qu'à la question précédente peut être tenu, par analogie avec la question 3.b. :

$$\boxed{P_{[X_{2i}=1]}(X_{2i+2k+1} = 1) = \frac{1}{n-i}.}$$

   (c) Nous venons de prouver que pour tout $j \in [\![1, 2n-2j-1]\!]$, $P_{[X_{2i}=1]}(X_{2i+j} = 1) = \frac{1}{n-i}$ (en distinguant les cas j pair ou impair). Utilisons là encore la question préliminaire :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_{2i}, X_{2i+j}) &= P([X_{2i} = 1] \cap [X_{2i+j} = 1]) - P([X_{2i} = 1])P([X_{2i+j} = 1]) \\ &= P(X_{2i} = 1)P_{[X_{2i}=1]}(X_{2i+j} = 1) - \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{n(n-i)} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-(n-i)}{n^2(n-i)} \boxed{= \frac{i}{n^2(n-i)}.} \end{aligned}$$

8. On a $\text{Cov}(X,X)=E((X-E(X))^2)=V(X)$. En utilisant la bilinéarité de la covariance, on a :

$$\begin{aligned}
V(X) &= \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^{2n-1} X_i, \sum_{j=1}^{2n-1} X_j\right) = \sum_{i=1}^{2n-1}\text{Cov}\left(X_i, \sum_{j=1}^{2n-1} X_j\right) \qquad \text{par linéarité à gauche}\\
&= \sum_{i=1}^{2n-1}\sum_{j=1}^{2n-1}\text{Cov}\left(X_i, X_j\right) \qquad \text{par linéarité à droite}\\
&= \sum_{i=1}^{2n-1}\text{Cov}\left(X_i,X_i\right) + \sum_{1\leq i<j\leq 2n-1}\text{Cov}\left(X_i,X_j\right) + \sum_{1\leq j<i\leq 2n-1}\text{Cov}\left(X_i,X_j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{2n-1} V\left(X_i\right) + \sum_{1\leq i<j\leq 2n-1}\text{Cov}\left(X_i,X_j\right) + \sum_{1\leq j<i\leq 2n-1}\text{Cov}\left(X_j,X_i\right) \qquad \text{par symétrie}\\
&= \sum_{i=1}^{2n-1}\frac{1}{n}\frac{n-1}{n} + 2\sum_{1\leq i<j\leq 2n-1}\text{Cov}\left(X_i,X_j\right) = \frac{(2n-1)(n-1)}{n^2} + 2\sum_{1\leq i<j\leq 2n-1}\text{Cov}\left(X_i,X_j\right)
\end{aligned}$$

En séparant les cas où i est pair de ceux où i est impair, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i<j\leq 2n-1}\text{Cov}\left(X_i,X_j\right) &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2i+1}^{2n-1}\text{Cov}(X_{2i},X_k) + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=2i+2}^{2n-1}\text{Cov}(X_{2i+1},X_k)\\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{2n-2i-1}\text{Cov}(X_{2i},X_{2i+k}) + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{2n-2i-2}\text{Cov}(X_{2i+1},X_{2i+k+1})\\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{2n-2i-1}\frac{i}{n^2(n-i)} + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{2n-2i-2}\frac{-1}{n^2} = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{i(2n-2i-1)}{n^2(n-i)} - \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i-1)\\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{2i(n-i)-i+n-n)}{n^2(n-i)} - \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i-1)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(2i-1)(n-i)-n)}{n-i} - \frac{2}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}(j)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}(2i+1) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n-i} - \frac{2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}\\
&= \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1} i + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1} 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} - \frac{n(n-1)}{n^2}\\
&= \frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} - \frac{n(n-1)}{n^2} = \frac{n-1}{n^2} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc conclure que :

$$V(X) = \frac{(2n-1)(n-1)}{n^2} + \frac{2(n-1)}{n^2} - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} = \boxed{\frac{(2n+1)(n-1)}{n^2} - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}}$$

Problème 1

Partie I : Étude d'une fonction f définie par une intégrale.

1. Soit $x\in]0,+\infty[$. La fonction $t\mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ (car pour tout $t\in[0,+\infty[$, $x+t\geq x>0$).

   L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$ est donc impropre en $+\infty$.

   - On a $\dfrac{t^2e^{-t}}{x+t}\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{t^2e^{-t}}{t}=te^{-t}$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} te^{-t}=0$ par croissances comparées. Ainsi $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2e^{-t}}{x+t}=0$ et donc $\dfrac{e^{-t}}{x+t}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

- Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\dfrac{1}{t^2} \geq 0$.
- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge car c'est une intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = 2 > 1$.

Par théorème de comparaison, on en déduit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Finalement, $\boxed{\text{l'intégrale généralisée } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

2. Soit $x \in]0, +\infty[$. Pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a $\dfrac{e^{-t}}{x+t} \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t}_{\geq 0} \geq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

De plus on a pour tout $t \in [0, 1]$, $e^{-t} \geq e^{-1}$ et donc :

$$\frac{e^{-t}}{x+t} \geq \frac{e^{-1}}{x+t} \qquad (\text{car } x+t > 0).$$

Par croissance de l'intégrale (toutes les intégrales en jeu convergent) :

$$\boxed{f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t.}$$

Enfin, on a :

$$\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t = \left[e^{-1}\ln(|x+t|)\right]_0^1 = e^{-1}(\ln(x+1) - \ln x).$$

Comme enfin $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} e^{-1}(\ln(x+1) - \ln x) = +\infty$, on en déduit par théorème de comparaison :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.}$$

3. Montrons que :

$$\forall x \in]0; +\infty[,\ 0 < f(x) \leq \frac{1}{x}.$$

Soit donc $x \in]0, +\infty[$. On a $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t$. C'est l'intégrale (convergente) de la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ **continue** et **positive** sur $[0, +\infty[$. De plus cette fonction est **non identiquement nulle** (car par exemple $\dfrac{e^{-0}}{x+0} = \dfrac{1}{x} \neq 0$). On en déduit par théorème de stricte positivité de l'intégrale que $f(x) > 0$.

Montrons la deuxième inégalité : pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a $x + t \geq x > 0$ donc $\dfrac{1}{x+t} \leq \dfrac{1}{x}$ et donc $\dfrac{e^{-t}}{x+t} \leq \dfrac{e^{-t}}{x}$ (car $e^{-t} \geq 0$). De plus, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{1} = 1$ (intégrale du type $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ avec $\lambda = 1 > 0$). Par croissance de l'intégrale, on obtient (toutes les intégrales convergent) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\,\mathrm{d}t \quad \text{d'où finalement} \quad \boxed{0 < f(x) \leq \frac{1}{x}.}$$

Puisqu'enfin $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ existe et vaut } 0.}$$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale Gamma $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\nu-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ avec $\nu = 2 > 0$ donc $\boxed{\text{elle converge}}$.

On cherche maintenant à majorer la quantité $\left|f(x) - \dfrac{1}{x}\right|$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Soit donc $x \in]0, +\infty[$. On a vu à la question précédente que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$.
On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - \frac{1}{x}\right| &= \left|\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{x+t} - \frac{e^{-t}}{x}\right)\mathrm{d}t\right| \quad \text{par linéarité} \\
&= \left|\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{x-(x+t)}{x(x+t)}\right)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{-t}{x(x+t)}\right)\mathrm{d}t\right|
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[$, on a $\left|\dfrac{te^{-t}}{x(x+t)}\right| \leq \dfrac{te^{-t}}{x^2}$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge (absolument), on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{-t}{x(x+t)}\right)\mathrm{d}t$ converge elle aussi absolument. On peut donc appliquer l'inégalité triangulaire :

$$\left|f(x) - \frac{1}{x}\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t}\left|\frac{-t}{x(x+t)}\right|\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{t}{x(x+t)}\,\mathrm{d}t,$$

puis par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{\left|f(x) - \frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t.}$$

On obtient en divisant la relation précédente par $\dfrac{1}{x} > 0$:

$$\left|\frac{f(x)}{1/x} - 1\right| \leq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ est une constante réelle, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t = 0$. Par théorème des gendarmes, on en déduit finalement que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{1/x} \text{ existe et vaut } 1.$$

Ainsi, on a $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}}$.

Partie II : Une autre expression intégrale de f.

A - Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme d'une intégrale.

5. Soit $(x, h) \in]0; +\infty[\times \mathbb{R}^*$ tel que $h > -\dfrac{x}{2}$.

   (a) La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (car pour tout $t \in [0, +\infty[$, $x + t \neq 0$). L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ est donc impropre en $+\infty$.

   - On a $\dfrac{t^2e^{-t}}{(x+t)^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^2e^{-t}}{t^2} = e^{-t}$, et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$. Donc on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{(x+t)^2} = 0$ et $\dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
   - Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\dfrac{1}{t^2} \geq 0$.
   - L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Par le théorème de comparaison, on en déduit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt$ converge.

Ainsi $\boxed{\text{l'intégrale généralisée } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt \text{ converge.}}$

(b) Soit $t \in [0,+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right| &= \left|\frac{(x+t)^2-(x+h+t)(x+t)+h(x+h+t)}{h(x+h+t)(x+t)^2}\right| \\ &= \left|\frac{x^2+t^2+2xt-x^2-xt-hx-ht-tx-t^2+hx+h^2+ht}{h(x+h+t)(x+t)^2}\right| \\ &= \left|\frac{h^2}{h(x+h+t)(x+t)^2}\right| = \left|\frac{h}{(x+h+t)(x+t)^2}\right| = \frac{|h|}{(x+h+t)(x+t)^2}.\end{aligned}$$

On a :

- $x+t \geq x \geq 0$ donc $(x+t)^2 \geq x^2 \geq 0$;
- $x+h+t \geq x - \dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2} \geq 0$ car $h > -\dfrac{x}{2}$.

D'où $(x+h+t)(x+t)^2 \geq \dfrac{x}{2}x^2 = \dfrac{x^3}{2} > 0$ et donc $\dfrac{|h|}{(x+h+t)(x+t)^2} \leq \dfrac{2|h|}{x^3}$. On obtient bien :

$$\boxed{\forall t \in [0,+\infty[, \quad \left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right| \leq \frac{2|h|}{x^3}.}$$

(c) On a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\frac{1}{h}\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+h+t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t\right)+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right)\mathrm{d}t\right|\end{aligned}$$

par linéarité. Or pour tout $t \in [0,+\infty[$, on a d'après la question précédente (avec $e^{-t} \geq 0$) :

$$0 \leq \left|e^{-t}\left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right)\right| \leq \frac{2|h|}{x^3}e^{-t}.$$

On sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2|h|}{x^3}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ aussi par linéarité. Par le théorème de comparaison, on en déduit que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\left|e^{-t}\left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right)\right|\mathrm{d}t$$

converge. On peut donc appliquer l'inégalité triangulaire :

$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{+\infty}\left|e^{-t}\left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right)\right|\mathrm{d}t$$

puis par croissance (les deux intégrales en jeu étant convergentes), on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\left|e^{-t}\left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right)\right|\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty}\frac{2|h|}{x^3}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, on a :

$$\boxed{\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{+\infty}\frac{2|h|}{x^3}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{2|h|}{x^3}\int_0^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{2|h|}{x^3}.}$$

D'où le résultat.

6. Soit $x \in]0,+\infty[$. D'après la question précédente, on a pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $h > -\dfrac{x}{2}$:

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{2|h|}{x^3}.$$

Comme $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2|h|}{x^3} = 0$, par le théorème de des gendarmes, on obtient :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ existe et vaut } -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Par définition, cela signifie que f est dérivable en x et $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in]0,+\infty[$, on conclut donc que $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[}$ et $\boxed{\text{pour tout } x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t}$.

7. Soit $x \in]0,+\infty[$. Soit $(\varepsilon, A) \in]0,1] \times [1,+\infty[$. On effectue une intégration par parties sur $[\varepsilon, A]$:

$$\begin{array}{c|ccc} + & e^{-t} & & \dfrac{1}{(x+t)^2} \\ & & \searrow & \\ - & -e^{-t} & \overset{\int}{\longleftarrow} & -\dfrac{1}{x+t} \end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto -\dfrac{1}{x+t}$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, A]$. On obtient donc par intégration par parties :

$$\int_\varepsilon^A \frac{1}{(x+t)^2} \times e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{x+t} \times e^{-t}\right]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A \left(-\frac{1}{x+t}\right) \times \left(-e^{-t}\right)\,\mathrm{d}t$$

soit encore :

$$\boxed{\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.}$$

8. On a $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} = \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{e^{-A}}{x+A} = 0$. De plus, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ convergent. Ainsi, par passage à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ et $A \to +\infty$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \quad \text{donc} \quad -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{x} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

On a donc $\boxed{\text{pour tout } x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = -\dfrac{1}{x} + f(x).}$

9. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x} + f(x)$.

Comme les fonctions $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ et f sont dérivables sur $]0,+\infty[$, par somme, on obtient que f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} + f'(x)$.

Comme les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et f' sont continues sur $]0,+\infty[$ (car f' est dérivable sur $]0,+\infty[$), par somme, on déduit que f'' est continue sur $]0,+\infty[$, et donc que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[.}$

Mise en garde.

Rappelons en passant qu'une fonction dérivable est continue, mais que la réciproque est fausse en général ($x \mapsto \sqrt{x}$ en 0 par exemple).

B - Intervention d'une fonction auxiliaire g.

10. Les fonctions $x \mapsto e^{-x}$ et f sont dérivables sur $]0,+\infty[$ donc par produit, $\boxed{g \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[}$.
On a alors pour tout $x \in]0,+\infty[$:
$$g'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}\left(-\frac{1}{x} + f(x)\right) \boxed{= -\frac{e^{-x}}{x}.}$$

11. Soit $x \in]0,+\infty[$.
Méthode 1 : La fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{u}$ est continue sur $[x,+\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ est généralisée en $+\infty$.
Soit $A \in [x,+\infty[$. On a :
$$\int_x^A \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_x^A (-g'(u))\,\mathrm{d}u = [-g(u)]_x^A = -g(A) + g(x).$$
Or, on a $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} g(A) = \lim_{A\to+\infty} e^{-A}f(A) = 0$ car $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} f(A) = 0$.
Par suite, l'intégrale $\boxed{\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \text{ converge}}$ et $\boxed{\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = g(x)}$, et on a :
$$\boxed{f(x) = e^x g(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u}$$
Méthode 2 : On pose $u = x + t$ (changement de variable affine donc licite). On a $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$, $u = x$ (resp. $u \to +\infty$) lorsque $t = 0$ (resp. $t \to +\infty$). On sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ converge donc d'après le théorème de changement de variable, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{x-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ converge et on a :
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} e^x \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$
Comme e^x est une constante non nulle, on en déduit par linéarité que l'intégrale $\boxed{\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \text{ converge}}$ et que $\boxed{\displaystyle f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u}$. De plus, on a $\boxed{\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = e^{-x}f(x) = g(x).}$

12. Comme $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$, on a $\displaystyle e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ d'où en multipliant par e^{-x} : $\boxed{\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.}$

13. On a :
    - $\displaystyle n^2 \int_n^{+\infty} e^{-u}u\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 \times \frac{e^{-n}}{n} = ne^{-n}$;
    - $ne^{-n} \geq 0$;

    On en déduit que les séries $\sum n^2 \displaystyle\int_n^{+\infty} e^{-u}u\,\mathrm{d}u$ et $\sum ne^{-n}$ sont de même nature. Montrons que $\sum ne^{-n}$ converge :
    - $ne^{-n} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissance comparée ;
    - $\dfrac{1}{n^2} \geq 0$ pour tout $n \geq 0$;
    - $\displaystyle\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^2}$ converge (c'est une série de Riemann avec $2 > 1$).

    Par théorème de comparaison, on en déduit que la série $\sum ne^{-n}$ converge, et donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq1} n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \text{ converge}}$ aussi.