DS3

Devoir Surveillé du 15/11/2019

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

Définitions : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

- On note id_E l'application identique de E.
- Pour tout endomorphisme f de E, on note $f^0 = id_E$, et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre p s'il existe un élément x_0 de E vérifiant les trois conditions suivantes :
  - ⋆ $f^p(x_0) = x_0$,
  - ⋆ la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de E,
  - ⋆ la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.

La famille $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\right)$ est alors appelée un **cycle** de f.

Partie I : Étude d'un exemple

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice associée dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $\mathscr{B}' = \left(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\right)$ est une base de E et déterminer la matrice associée à f relativement à cette base.

2. Montrer que f est cyclique d'ordre 4 et que $\left(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)\right)$ est un cycle de f.

3. Montrer que $f^4 = id_E$. En déduire un polynôme annulateur de f.

Partie II : Cas général

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n, et on considère un endomorphisme f de E cyclique d'ordre p.
Soit $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\right)$ un cycle de f.

1. Montrer : $p \geq n$.

2. Montrer que $f^p = id_E$. En déduire que f est bijective.

3. On note m le plus grand des entiers naturels k tels que la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0)\right)$ est libre.

   (a) Montrer que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$.

   (b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à m, le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$

   (c) En déduire que $m = n$ et que la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E.

4. On note $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ les n nombres complexes tels que :

$$f^n(x_0) = a_0x_0 + a_1f(x_0) + a_2f^2(x_0) + \cdots + a_{n-1}f^{n-1}(x_0)$$

   (a) On considère l'endomorphisme g de E défini par :

$$g = a_0id_E + a_1f + a_2f^2 + \cdots + a_{n-1}f^{n-1}.$$

   Montrer que : $\quad \forall k \in \mathbb{N},\ g\left(f^k(x_0)\right) = f^{n+k}(x_0).$

   En déduire que : $\quad f^n = a_0id_E + a_1f + a_2f^2 + \cdots + a_{n-1}f^{n-1}.$

   (b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ à l'aide des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

   (c) Montrer que : $\quad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \mathrm{rg}(f - \lambda id_E) \geq n - 1.$

   En déduire que : $\quad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda id_E)) \leq 1.$

Exercice 2

1. **Question préliminaire :** montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant toutes deux des lois de Bernoulli, alors :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = P([X = 1] \cap [Y = 1]) - P(X = 1)P(Y = 1).$$

Une urne contient une boule noire et $(n - 1)$ boules blanches, n désignant un entier supérieur ou égal à 2. On vide l'urne en effectuant des tirages d'une boule de la manière suivante : le premier tirage s'effectue sans remise, le deuxième s'effectue avec remise, le troisième s'effectue sans remise, le quatrième s'effectue avec remise… D'une manière générale, les tirages d'ordre impair s'effectuent sans remise et les tirages d'ordre pair s'effectuent avec remise de la boule tirée.

2. (a) Quel est le nombre total N de tirages effectués lors de cette épreuve ?

   (b) Pour j élément de $[\![1, n-1]\!]$, combien reste-t-il de boules avant le $(2j)$-ième tirage ? Combien en reste-t-il avant le $(2j + 1)$-ième tirage ?

On désigne par X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule noire est obtenue au k-ième tirage (que ce soit la première fois ou non) et 0 sinon. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la boule noire lors de cette épreuve.

3. (a) Calculer $P(X_1 = 1)$, $P(X_2 = 1)$.

   (b) Pour tout entier naturel j de $[\![1, n-1]\!]$, calculer $P(X_{2j+1} = 1)$ et $P(X_{2j} = 1)$.

   (c) En déduire la loi suivie par toutes les variables X_k.

4. Pour tout j élément de $[\![1, n]\!]$, on note U_j l'événement : « On obtient la boule noire pour la première fois au $(2j - 1)$-ième tirage ».

(a) En considérant l'état de l'urne avant le $(2n-2)$-ième tirage, montrer que $P(U_n) = 0$.

Montrer que : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ P(U_j) = \dfrac{n-j}{n(n-1)}$.

(b) Exprimer l'événement $(X = 1)$ en fonction des U_j, puis en déduire la valeur de $P(X = 1)$.

(c) Montrer que $P(X = n) = \dfrac{1}{n!}$.

5. Montrer que $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} X_k$, puis en déduire l'espérance de X.

6. Soit i un entier naturel compris entre 0 et $n-2$.

   (a) Pour tout j de $[\![1, 2n-2i-2]\!]$, donner la valeur de $P_{[X_{2i+1}=1]}(X_{2i+j+1} = 1)$.

   (b) En utilisant la question 1., en déduire que :

$$\forall j \in [\![1, 2n-2i-2]\!],\ \mathrm{Cov}(X_{2i+1}, X_{2i+j+1}) = \frac{-1}{n^2}.$$

7. Soit i un entier naturel compris entre 1 et $n-1$.

   (a) Montrer que, pour tout k de $[\![1, n-i-1]\!]$, $P_{[X_{2i}=1]}(X_{2i+2k} = 1) = \dfrac{1}{n-i}$.

   (b) Montrer que, pour tout k de $[\![0, n-i-1]\!]$, $P_{[X_{2i}=1]}(X_{2i+2k+1} = 1) = \dfrac{1}{n-i}$.

   (c) En déduire que : $\forall j \in [\![1, 2n-2i-1]\!],\ \mathrm{Cov}(X_{2i}, X_{2i+j}) = \dfrac{i}{n^2(n-i)}$

8. En notant que $V(X) = \mathrm{Cov}(X, X)$, montrer que la variance de X est donnée par :

$$V(X) = \frac{(2n+1)(n-1)}{n^2} - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}.$$

Problème 1

Partie I : Étude d'une fonction f définie par une intégrale.

1. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ converge.

   On note $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0; +\infty[$, par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

2. Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[,\ f(x) \geq \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

   En déduire : $f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

3. Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[,\ 0 < f(x) \leq \dfrac{1}{x}$.

   En déduire : $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et que :
$$\forall x \in]0;+\infty[,\ \left|f(x)-\frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
En déduire que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Partie II : Une autre expression intégrale de f.

A - Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme d'une intégrale.

5. Soit $(x,h) \in]0;+\infty[\times\mathbb{R}^*$ tel que $h > -\dfrac{x}{2}$.
   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
   (b) Établir : $\quad \forall t \in [0;+\infty[,\quad \left|\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+h+t}-\dfrac{1}{x+t}\right)+\dfrac{1}{(x+t)^2}\right| \leq \dfrac{2|h|}{x^3}$.
   (c) En déduire : $\quad \left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \dfrac{2|h|}{x^3}$.

6. En déduire que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $\forall x \in]0;+\infty[,\quad f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

7. Montrer, pour tout $x \in]0;+\infty[$ et tout $(\varepsilon, A) \in]0;1]\times[1;+\infty[$:
$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt = -\frac{e^{-A}}{x+A}+\frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon}-\int_\varepsilon^A\frac{e^{-t}}{x+t}dt.$$

8. En déduire : $\quad \forall x \in]0;+\infty[,\quad f'(x) = -\dfrac{1}{x}+f(x)$.

9. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall x \in]0;+\infty[,\quad f''(x) = \dfrac{1}{x^2}+f'(x)$.

B - Intervention d'une fonction auxiliaire g.

On note $g :]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0;+\infty[$, par : $g(x) = e^{-x}f(x)$.

10. Démontrer que g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $\quad \forall x \in]0;+\infty[,\quad g'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x}$.

11. Montrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ converge et que :
$$\forall x \in]0;+\infty[,\ g(x) = \int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u,$$
    puis : $\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = e^x\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$.

12. Montrer : $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

13. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq1} n^2\int_n^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$?