DS5

Devoir Surveillé du 16/12/2019

Durée : 3h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1.1 (Edhec 2008)

1. Commençons par chercher les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On résout pour cela l'équation :

$$\lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det(A) = 0 \qquad \text{soit encore } \lambda^2 - 2x\lambda + y = 0$$

On calcule le discriminant de cette équation du second degré :

$$\Delta = (2x)^2 - 4y = 4(x^2 - y).$$

On a alors plusieurs cas à étudier :

- Si $\Delta > 0$, alors il y a deux valeurs propres réelles distinctes. Comme A est de taille 2×2, on en déduit que A est diagonalisable dans ce cas.
- Si $\Delta = 0$ (soit $x^2 = y$), alors il y a une seule valeur propre qui est $\frac{2x}{2} = x$. Mais alors A est diagonalisable si et seulement si $A = xI_2$. Or ce n'est clairement pas le cas, et ce quelque soit $x \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$, alors il n'y a pas de valeur propre réel, et A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Ainsi $\boxed{\text{la matrice } A \text{ est diagonalisable dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } x^2 - y > 0.}$

2. (a) On procède par étapes successives.

Étape 1. On a $X(\Omega) = [0,1]$, donc $X^2(\Omega) = [0,1]$. En particulier, on a $F_{X^2}(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_{X^2}(x) = 1$ si $x > 1$.

Étape 2. Soit $x \in [0,1]$. On a :

$$\begin{aligned} F_{X^2}(x) &= P(0 \leq X \leq \sqrt{x}) \qquad \text{car } X \in [0,1] \\ &= P(X \leq \sqrt{x}) - \underbrace{P(X < 0)}_{=0 \text{ car } X \geq 0} \\ &= F_X(\sqrt{x}) = \sqrt{x} \qquad \text{car } \sqrt{x} \in [0,1] \end{aligned}$$

Ainsi on obtient que :

$$F_{X^2} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Étape 3. F_{X^2} est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0 et en 1. En 0, on a :

$$\lim_{x\mapsto 0^-} F_{X^2}(x) = \lim_{x\mapsto 0^+} F_{X^2}(x) = F_{X^2}(0).$$

Donc F_{X^2} est continue en 0. On montre de même que F_{X^2} est continue aussi en 1. Donc F_{X^2} est continue sur $\mathbb{R}$. Enfin F_{X^2} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.

Étape 4. On détermine alors une densité de X^2 en dérivant :

$$\boxed{f_{X^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}}$$

où les valeurs en 0 et en 1 sont fixées arbitrairement à 0.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} F_{-Y}(x) &= P(-Y \leq x) = P(Y \geq -x) = 1 - P(Y < -x) \\ &\overset{Y \text{ continue}}{=} 1 - P(Y \leq -x) = 1 - F_Y(-x). \end{aligned}$$

Ainsi on obtient puisque $Y \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$:

$$F_{-Y}(x) = \begin{cases} 1-0 & \text{si } -x < 0 \\ 1-(-x) & \text{si } 0 \leq -x \leq 1 \\ 1-1 & \text{si } -x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Cette fonction est dérivable sur $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$. On détermine alors une densité de $-Y$ en dérivant :

$$\boxed{f_{-Y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}}$$

où les valeurs en -1 et en 0 sont fixées arbitrairement à 0.

Remarque. $-Y$ est bien une variable aléatoire à densité puisque F_{-Y} est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en -1 et en 0. Plus précisément, on remarque que $-Y \hookrightarrow \mathscr{U}([-1,0])$.

(c) Posons $Z = X^2 - Y = X^2 + (-Y)$. Puisque X et Y sont indépendantes, il en est de même de X^2 et $-Y$. Comme de plus f_{X^2} (et f_{-Y}) est bornée, on sait par le cours que Z est une variable à densité, de densité continue sur $\mathbb{R}$, définie par :

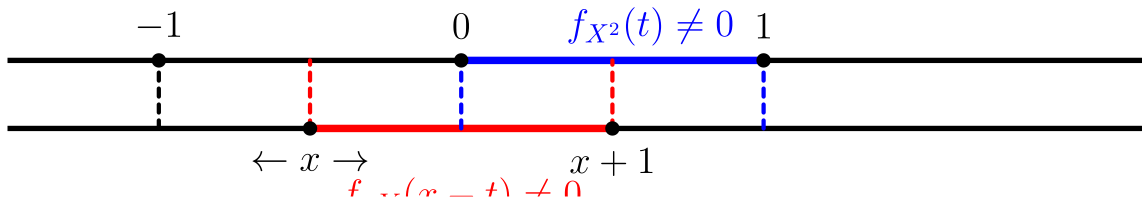
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X^2}(t) f_{-Y}(x-t) \mathrm{d}t.$$

On a pour tout $x, t \in \mathbb{R}$:

$$f_{X^2}(t) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq t \leq 1$$

et

$$f_{-Y}(x-t) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq x-t \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t-1 \leq x \leq t \quad \Leftrightarrow \quad x \leq t \leq x+1.$$



Ainsi on a :

$$f_{X^2}(t)f_{-Y}(x-t) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ x \leq t \leq x+1 \end{cases}$$

Si $x < -1$ ou $x > 1$ ce système d'inéquation n'a pas de solution. Si $x \in [-1, 1]$, on a :

$$f_{X^2}(t)f_{-Y}(x-t) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t \in [0, x+1] & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ t \in [x, 1] & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

On obtient donc :

- si $x < -1$ ou $x > 1$, $h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X^2}(t)f_{-Y}(x-t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\mathrm{d}t = 0$.
- si $-1 \leq x < 0$, on a :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X^2}(t)f_{-Y}(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^{x+1} f_{X^2}(t)f_{-Y}(x-t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{x+1} \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t = [\sqrt{t}]_0^{x+1} = \sqrt{x+1}. \end{aligned}$$

- si $0 \leq x \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X^2}(t)f_{-Y}(x-t)\mathrm{d}t = \int_x^1 f_{X^2}(t)f_{-Y}(x-t)\mathrm{d}t \\ &= \int_x^1 \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t = [\sqrt{t}]_x^1 = \sqrt{1} - \sqrt{x} = 1 - \sqrt{x}. \end{aligned}$$

On peut donc conclure que Z admet pour densité la fonction h définie par :

$$\boxed{h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(d) La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $X^2 - Y > 0$. Cet évènement se réalise avec la probabilité suivante :

$$P(X^2 - Y > 0) = P(Z > 0) = \int_0^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 1 - \sqrt{t}\ \mathrm{d}t = \left[t - \frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi $\boxed{\text{la probabilité que } M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix} \text{ soit diagonalisable dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ est de } \frac{1}{3}.}$

Exercice 1.2 (Edhec 2019)

1. (a) On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 3A - 2I.$$

$$\boxed{P(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2) \text{ est un polynôme de degré 2 annulateur de } A.}$$

(b) Par le cours, on a $\mathrm{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\}$, soit ici $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1, 2\}$.
$\boxed{\text{Les valeurs propres possibles de } A \text{ sont } \lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = 2.}$

(c) Rappelons que les valeurs propres de f sont égales à celles de A. De plus avec le théorème du rang, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\dim E_\lambda = 3 - \mathrm{rg}(A - \lambda I_3).$$

$\boxed{\text{On peut conjecturer que 1 et 2 sont valeurs propres de } f \text{ et que } \dim E_1 = 2 \text{ et } \dim E_2 = 1.}$

(d) On a :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0_{3,1} \Leftrightarrow -x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

L'espace propre associé à la valeur propre 1 est donc $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Ces **deux** vecteurs ne sont pas colinéaires et forment une famille libre. Ainsi, on a bien $\boxed{1 \in \mathrm{Sp}(f) \text{ et } ((1,1,0),(1,0,-1)) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f - Id).}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow (A - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_2 & = 2x_3 \end{cases}.$$

On obtient que $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Ainsi $\boxed{2 \text{ est valeur propre de } f \text{ et } ((0,2,1)) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f - 2Id).}$

2. (a) Par la question 1., les valeurs propres de f sont 1 et 2, et la somme des dimensions des espaces propres de f vaut 3, soit $\dim \mathbb{R}^3$. f est donc diagonalisable et on a :

$$\ker(f - Id) \oplus \ker(f - 2Id) = \mathbb{R}^3.$$

La concaténation de bases de chacun des espaces propres est une base de $\mathbb{R}^3$.

Pour respecter les conditions imposées, changeons la base trouvée pour $E_1(A)$.

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

et la famille en jeu est encore libre (car **deux** vecteurs non colinéaires). Prenons donc :

$$\boxed{u_1 = (1,1,0), \quad v_1 = (0,1,1), \quad v_2 = (0,1,2)}$$

(u_1, v_1) est une base de $\mathrm{Ker}(f - Id)$ et v_2 est une base de $\mathrm{Ker}(f - 2Id)$. Leur concaténation (u_1, v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) On résout le système :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = a \\ \alpha + \lambda + 2\gamma = b \\ \lambda + \gamma = c \end{cases}.$$

On trouve en résolvant ce système :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a-b+2c) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-a+b-c) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x = (a,b,c) \text{ a pour coordonnées } (a, a-b+2c, -a+b-c) \text{ dans la base } (u_1, v_1, v_2).}$$

3. (a) Posons $P(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\dots(X-\lambda_p) = a_pX^p + \cdots + a_1X + a_0$. On cherche à calculer $P(D)$. Comme D est une matrice diagonale, de coefficients diagonaux $d_{1,1}, \dots, d_{n,n}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$D^k = \begin{pmatrix} d_{1,1}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{2,2}^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{n,n}^k \end{pmatrix}.$$

Par règles de calcul matriciel, pour $a_0, a_1, \dots, a_p$ réels, on obtient :

$$a_0I + a_1D + \cdots + a_pD^p = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{p} a_k d_{1,1}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{p} a_k d_{2,2}^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{k=0}^{p} a_k d_{n,n}^k \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que $P(D) = \begin{pmatrix} P(d_{1,1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(d_{2,2}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P(d_{n,n}) \end{pmatrix}$.

La matrice diagonale D est une matrice qui comporte sur sa diagonale les valeurs propres de f. Donc on a pour tout i, $d_{i,i} \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ et tous les coefficients diagonaux de D sont des racines de P. Finalement, on obtient bien :

$$\boxed{(D-\lambda_1I_n)(D-\lambda_2I_n)\dots(D-\lambda_pI_n) = P(D) = 0_n}$$

(b) Le polynôme P présenté en question précédente est donc annulateur de D, de sorte que :

$$0_n = P(M_{\mathscr{B}}(f)) \underset{\text{cours}}{=} M_{\mathscr{B}}(P(f)) \text{ et donc } P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

$$\boxed{(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\dots(X-\lambda_p) \text{ est un polynôme annulateur de } f.}$$

4. (a) Pour k fixé dans $[\![1,p]\!]$, les racines de L_k sont $1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, p$ (on les a facilement car L_k est sous forme factorisée). On a donc pour $i \in [\![1,p]\!]$, $i \neq k$, $L_k(\lambda_i) = 0$. D'autre part, on a par produit de termes valant tous 1 que :$L_k(\lambda_k) = 1$. On peut donc conclure que :

$$\boxed{L_k(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}}$$

Déjà vu ?
On reconnait ici les polynômes de Lagrange associés aux réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ deux à deux distincts.

(b)
- Le degré de chaque polynôme L_k est $p-1$, donc la famille $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ est bien une famille de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.
- Montrons que cette famille est libre. Soient $a_1, a_2, \dots, a_p$ des réels tels que $a_1L_1 + a_2L_2 + \dots + a_pL_p = 0$. On a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a_1L_1(x) + a_2L_2(x) + \dots + a_pL_p(x) = 0.$$
En évaluant en $x = \lambda_i$ et en utilisant a., on trouve $a_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Ainsi la famille $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ est libre.
- $\text{Card}(L_1, L_2, \dots, L_p) = p = \dim \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Par ces trois points, $\boxed{(L_1, L_2, \dots, L_p) \text{ est une base de } \mathbb{R}_{p-1}[X].}$

(c) Soit $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$. En utilisant la base précédente, il existe des réels $a_1, a_2, \dots, a_p$ tels que :
$$P = a_1L_1 + a_2L_2 + \dots + a_pL_p.$$
On a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_1L_1(x) + a_2L_2(x) + \dots + a_pL_p(x).$$
En évaluant en $x = \lambda_i$ et en utilisant a., on trouve $P(\lambda_i) = a_i$. Ainsi on a que :
$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X], \quad P = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i)L_i}$$

(d) On applique la question précédente au polynôme constant égal à 1, qui appartient à $\mathbb{R}_{p-1}[X]$:
$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} L_i = 1.}$$

5. (a) Soit $x \in E$.
$$\begin{aligned}(f - \lambda_k Id)(L_k(f)(x)) &= ((f - \lambda_k Id) \circ L_k(f))(x) \\ &= c_k((f - \lambda_k Id) \circ Q(f))(x)\end{aligned}$$
$$\text{où } c_k = \prod_{j \in [\![1,p]\!],\, j \neq k} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_j} \text{et où } Q = \prod_{j \in [\![1,p]\!],\, j \neq k} (X - \lambda_j)$$
$$\begin{aligned}(f - \lambda_k Id)(L_k(f)(x)) &= c_k((X - \lambda_k) \times Q)(f)(x) = c_kP(f)(x) \\ &= 0 \text{ par 3.b.}\end{aligned}$$
Donc on a $\boxed{\text{pour tout } x \in E,\ L_k(f)(x) \in \ker(f - \lambda_k Id).}$

(b) Par 4.d. en l'endomorphisme f, on a $\sum\limits_{i=1}^{p} L_i(f) = Id$.
Soit $x \in E$. On applique l'endomorphisme précédent en x :
$$x = Id(x) = \sum_{i=1}^{p} L_i(f)(x)$$

Par la question précédente, pour tout i, $L_i(f)(x) \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_i Id)$. Ce qui précède constitue donc la décomposition d'un vecteur x de E dans la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i Id)$.

6. Ici $p = 2$, il y a deux polynômes : $L_1 = \frac{X-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} = 2 - X$ et $L_2 = \frac{X-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} = X - 1$. Soit $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Par 5., on a :

$$x = (2Id - f)(x) + (f(x) - x)$$

On a :

$$\begin{aligned}
(2I - A)X &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a - b + 2c \\ a - b + 2c \end{pmatrix} \\
&= a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a - b + 2c) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\text{et } (A - I)X &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (-a + b - c) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{On retrouve bien } x = au_1 + (a - b + 2c)v_1 + (-a + b - c)v_2.}$

Problème (EM Lyon 2007)

I. Étude d'un endomorphisme de E

1. Soit $P \in E$, de degré $\leq n$. Alors $(X^2 - 1)P$ est un polynôme de degré $\leq n + 2$, et donc $[(X^2 - 1)P]''$ est de degré au plus n. Donc $\boxed{[(X^2 - 1)P]'' \text{ appartient bien à } E.}$

2. Si $P = 1$, on a $(X^2 - 1)P = X^2 - 1$ et donc $[(X^2 - 1)P]'' = 2$. Ainsi on a $\boxed{\Phi(1) = 2}$.

   Si $P = X$, on a $(X^2 - 1)P = X^3 - X$ et donc $[(X^2 - 1)P]'' = 6X$. Ainsi on a $\boxed{\Phi(X) = 6X}$.

3. On a déjà d'après 1. que Φ est bien à valeur dans E. Montrons que Φ est linéaire. Soit $P_1, P_2 \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda P_1 + \mu P_2) &= [(X^2 - 1)(\lambda P_1 + \mu P_2)]'' = [\lambda(X^2 - 1)P_1 + \mu(X^2 - 1)P_2]'' \\
&\overset{\text{deriv. lin.}}{=} \lambda[(X^2 - 1)P_1]'' + \mu[(X^2 - 1)P_2]'' = \lambda\Phi(P_1) + \mu\Phi(P_2)
\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } E.}$

4. On a déjà calculer $\Phi(X^k)$ pour $k = 0, 1$. Soit $k \in [\![2, n]\!]$, on a $(X^2 - 1)X^k = X^{k+2} - X^k$ et donc en dérivant deux fois :

$$\boxed{\Phi(X^k) = (k + 2)(k + 1)X^k - k(k - 1)X^{k-2}.}$$

   On peut donc écrire la matrice de Φ dans la base canonique de E.

$$\boxed{A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 6 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 12 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & (n+2)(n+1) \end{pmatrix}.}$$

5. (a) A est triangulaire supérieure, donc ces valeurs propres se trouvent sur la diagonale. On en déduit que A, et donc Φ, admet $n{+}1$ valeurs propres qui sont $\lambda_k = (k{+}2)(k{+}1)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

   (b) Φ est bien bijective car toutes ses valeurs propres sont non nulles.

   (c) Comme Φ est un endomorphisme de E qui est de dimension $n + 1$ et qu'il admet $n + 1$ valeurs propres distinctes, alors on sait que ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1 et que Φ est diagonalisable.

6. (a) Soit donc P un vecteur propre associé à la valeur propre λ_k. On a :

$$\Phi(P) = \lambda_k P \text{ soit encore } [(X^2 - 1)P]'' = (k + 2)(k + 1)P.$$

   Comme P est un vecteur propre, P est non nul. Notons d son degré, et a_d son coefficient dominant. Identifions les coefficients dominants des polynômes en jeu :

   - $[(X^2 - 1)P]''$ est de degré d, on l'a vu, et son coefficient dominant est celui de $[a_d X^{d+2}]''$, c'est à dire $a_d(d + 2)(d + 1)$.
   - Le coefficient dominant de $(k + 2)(k + 1)P$ est $(k + 2)(k + 1)a_d$.

   Ces polynômes étant égaux, ils ont mêmes coefficients dominants. Comme de plus $a_d \neq 0$, on obtient $(k + 2)(k + 1) = (d + 2)(d + 1)$, et donc $\boxed{k = d}$.

   (b) Soit $Q = P(-X)$. On a par la formule de Leibniz

$$\lambda_k P(X) = \Phi(P) = [(X^2{-}1)P]'' = (X^2{-}1)P''(X){+}2{\times}2XP'(X){+}2P(X) \qquad (*)$$

   et de même

$$\Phi(Q) = (X^2 - 1)Q'' + 4XQ' + 2Q.$$

   Mais comme $Q(X) = P(-X)$, on a $Q'(X) = -P'(-X)$ et $Q''(X) = P''(-X)$ et donc

$$\Phi(Q) = (X^2 - 1)P''(-X) - 4XP'(-X) + 2P(-X).$$

   En substituant $-X$ à X dans $(*)$, on obtient

$$\lambda_k P(-X) = (X^2 - 1)P''(-X) - 4XP'(-X) + 2P(-X)$$

   et donc $\lambda_k Q = \Phi(Q)$. Comme de plus $Q \neq 0$ car $P \neq 0$, on en déduit que $\boxed{Q \text{ est vecteur propre associé à la valeur propre } \lambda_k \text{ également}}$.

7. Soit $(P_0, \dots, P_n)$ une famille de vecteurs propres de Φ telle que P_k est associée à la valeur propre λ_k. Comme il s'agit de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre, de cardinal $n + 1$ dans un espace de dimension $n + 1$,

donc c'est une base. Quitte à les normaliser, on peut supposer que ces polynômes sont tous unitaires.

D'après la question 6., on a montré de plus que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est de degré k. De plus, on sait que $Q_k = P_k(-X)$ est aussi vecteur propre pour la valeur propre λ_k. Comme le sous-espace propre $E_{\lambda_k}(\Phi)$ est de dimension 1, on en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $Q_k = \alpha P_k$. Mais alors identifions les coefficients dominants dans cette expression, c'est à dire les coefficients de X^k :

- le coefficient en X^k de αP est α car P est unitaire.
- le terme en X^k de $Q(X) = P(-X)$ est $(-X)^k = (-1)^k X^k$, et donc son coefficient dominant est $(-1)^k$.

Ainsi on a par identification que $(-1)^k = \alpha$, et donc que $Q = (-1)^k P$.

Reste à montrer l'unicité d'une telle base. Soit $(S_0, \ldots, S_n)$ une base de E satisfaisant les mêmes propriétés. Alors S_k est vecteur propre pour la valeur propre λ_k. Comme $\dim(E_{\lambda_k}(\Phi)) = 1$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $S_k = \alpha P_k$. Comme les polynômes sont supposés tous les deux unitaires, on a donc $\alpha = 1$ et $S_k = P_k$.

Enfin on a $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$, donc le polynôme P_k est pair si k est pair, impair si k est impair.

8. P_0 est de degré 0 et son coefficient dominant est 1, donc $P_0 = 1$. P_1 est impair, de degré 1 et son coefficient dominant est 1, donc $P_1 = X$.

   P_2 est pair, de degré 2 et son coefficient dominant est 1, donc il existe un réel a tel que $P_2 = X^2 + a$.

   $$\Phi(P_2) = \left((X^2-1)\,P_2\right)'' = \left((X^2-1)\,(X^2+a)\right)'' = (X^4+(a-1)\,X^2-a)'' = 12X^2+2(a-1)$$

   Or $\Phi(P_2) = \lambda_2\, P_2 = 12\,(X^2+a)$ donc $12X^2+2(a-1) = 12\,X^2+12a$ et ainsi $2a-2 = 12a$. Finalement $a = -1/5$ et $P_2 = X^2 - \frac{1}{5}$

   P_3 est impair, de degré 3 et son coefficient dominant est 1, donc il existe un réel b tel que $P_3 = X^3 + b\,X$.

   $$\Phi(P_3) = \left((X^2-1)\,P_3\right)'' = \left((X^2-1)\,(X^3+b\,X)\right)'' = (X^5+(b-1)\,X^3-b\,X)'' = 20\,X^3+6(b-1)\,X$$

   Or $\Phi(P_3) = \lambda_3\,P_3 = 20\,(X^3+b\,X)$ donc $20X^3+6(b-1)\,X = 20\,X^3+20b\,X$ et ainsi $6b-6 = 20b$. Finalement $b = -3/7$ et $P_3 = X^3 - \frac{3}{7}\,X$.

II. Un produit scalaire sur E

1. Pour tout P, Q dans E, l'application $x \mapsto (1-x^2)P(x)Q(x)$ est continue sur le segment $[-1, 1]$ donc l'intégrale est bien définie. Montrons qu'on définit un produit scalaire sur E.

   - Linéarité à gauche : pour tout $P_1, P_2, Q \in E$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

   $$\begin{aligned}(\lambda P_1 + \mu P_2|Q) &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)(\lambda P_1+\mu P_2)(x)Q(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(1-x^2)(\lambda P_1(x)+\mu P_2(x))Q(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1}\lambda(1-x^2)P_1(x)Q(x)+\mu(1-x^2)P_2(x)Q(x)\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{lin. de l'int.}}{=} \lambda\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_1(x)Q(x)\mathrm{d}x+\mu\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_2(x)Q(x)\mathrm{d}x \\ &= \lambda(P_1|Q)+\mu(P_2|Q).\end{aligned}$$

- Symétrie : Pour tout $P, Q \in E$, on a
$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)P(x)Q(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (1-x^2)Q(x)P(x)\mathrm{d}x = (Q|P).$$
On en déduit en particulier que $(\cdot|\cdot)$ est aussi linéaire à droite.
- Positif : Soit $P \in E$, l'application $x \mapsto (1-x^2)P(x)^2$ est positive sur $[-1,1]$, donc son intégrale est aussi positive :
$$(P|P) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)P(x)^2\mathrm{d}x \geq 0$$
- Définie positive : Soit $P \in E$ tel que $(P|P) = 0$, alors
$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)P(x)^2\mathrm{d}x = 0$$
Or c'est l'intégrale d'une fonction continue (car polynomiale) et positive. Son intégrale est nulle si et seulement si
$$\forall x \in [-1,1], \quad (1-x^2)P(x)^2 = 0$$
Comme $1 - x^2 \neq 0$ sur $]-1,1[$, on en déduit que
$$\forall x \in]-1,1[, \quad P(x) = 0$$
Le polynôme P admet donc une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul.

On conclut donc que $\boxed{(\cdot|\cdot) \text{ est bien un produit scalaire sur } E.}$

2. (a) Soit $P, Q \in E$. On a
$$\begin{aligned}(\Phi(P)|Q) &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)\Phi(P)(x)Q(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-1}^{1} [(X^2-1)P]''(x)(x^2-1)Q(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$
On effectue une double intégration par parties sur le segment $[-1,1]$.
$$\begin{array}{c|ccc} + & [(X^2-1)Q] & & [(X^2-1)P]'' \\ & & \searrow & \\ - & [(X^2-1)Q]' & & [(X^2-1)P]' \\ & & \searrow & \\ + & [(X^2-1)Q]'' & \xleftarrow{\int} & [(X^2-1)P] \end{array}$$
Les fonctions $x \mapsto (x^2-1)P(x)$ et $x \mapsto (x^2-1)Q(x)$ sont $\mathcal{C}^2$. Donc on obtient :
$$\begin{aligned}(\Phi(P)|Q) &= -\Big[(x^2-1)Q(x)[(X^2-1)P]'(x) - (x^2-1)P(x)[(X^2-1)Q]'(x)\Big]_{-1}^{1} \\ &\quad - \int_{-1}^{1} [(X^2-1)Q]''(x)(x^2-1)P(x)\mathrm{d}x \\ &\boxed{= (P|\Phi(Q))}\end{aligned}$$

(b) Soit $i \neq j$, on a :
$$\lambda_i (P_i|P_j) = (\Phi(P_i)|P_j) = (P_i|\Phi(P_j)) = \lambda_j (P_i|P_j).$$
Ainsi on obtient $(\lambda_i - \lambda_j)(P_i|P_j) = 0$, et puisque $\lambda_i \neq \lambda_j$, on obtient donc $\boxed{(P_i|P_j) = 0}$.

3. (a) Soit $j \in [\![1, n]\!]$, et soit S un polynôme de $\mathbb{R}_{j-1}[X]$. On sait que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\deg(P_k) = k$. Alors $(P_0, \dots, P_{j-1})$ est une famille de $\mathbb{R}_{j-1}[X]$ échelonnée en degré donc libre, de cardinal j égal à la dimension de $\mathbb{R}_{j-1}[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_{j-1}[X]$. En particulier il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{j-1}$ tels que

$$S = \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_{j-1} P_{j-1}$$

On en déduit alors que

$$(S|P_j) = (\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_{j-1} P_{j-1}|P_j) = \lambda_0(P_0|P_j) + \cdots + \lambda_{j-1}(P_{j-1}|P_j) \boxed{= 0}$$

car la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est orthogonale. D'où le résultat.

(b) Comme $j \geq 1$, on a d'après la question précédente $(1|P_j) = 0$, d'où :

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2) P_j(x) = 0.$$

Supposons par l'absurde que P_j garde un signe constant sur $]-1, 1[$, par exemple positif (le raisonnement est le même si négatif). Alors $x \mapsto (1 - x^2)P(x)$ est une fonction continue et positive sur $[-1, 1]$. Son intégrale étant nulle, cette fonction serait nulle. Le polynôme P_j aurait donc une infinité de racines et serait le polynôme nul (raisonnement déjà fait plus haut). Or ce n'est pas le cas puisque $P_j \neq 0$.

(c) Ainsi P_j ne garde pas un signe constant sur $]-1, 1[$. Il existe donc deux éléments $a, b \in]-1, 1[$ tels que $P(a) > 0$ et $P(b) < 0$. La fonction $x \mapsto P_j(x)$ étant continue, elle s'annule en un point $\alpha \in]-1, 1[$ en changeant de signe par le théorème des valeurs intermédiaires. Si on note m sa multiplicité comme racine de P_j, on a donc l'existence d'un polynôme Q tel que

$$P_j = (X - \alpha)^m Q \text{ avec } Q(\alpha) \neq 0$$

En particulier au voisinage de α, Q reste de signe constant, et c'est donc $(X - \alpha)^m$ qui change de signe en α. Ceci impose donc que m soit impair.
D'où le résultat voulu.

4. (a) Puisque $x_1, \dots, x_m$ sont des racines distinctes de P_j, on sait que le polynôme $S_m = (X - x_1) \dots (X - x_m)$ divise P_j : il existe donc un polynôme Q tel que

$$P_j = Q \times S_m.$$

En prenant le degré dans cette expression, on obtient que :

$$j = \deg(P_j) = \deg(Q \times S_m) = \deg(Q) + \deg(S_m) \geq \deg(S_m) = m.$$

(b) Le polynôme $S_m P_j$ n'a que des racines de multiplicité paire par construction (définition de S_m). Donc $x \mapsto S_m(x)P_j(x)$ garde un signe constant sur $]-1, 1[$.

(c) Supposons que $m < j$. D'après 3.(a), on a $(S_m|P_j) = 0$ car $\deg(S_m) = m < j$. Or on a

$$(S_m|P_j) = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) S_m(x) P_j(x) \mathrm{d}x.$$

Or la fonction $x \mapsto (1 - x^2)S_m(x)P_j(x)$ est de signe constant sur $[-1, 1]$ et est continue. Son intégrale est nulle si et seulement si $(1 - x^2)S_m(x)P_j(x) = 0$ pour tout $x \in [-1, 1]$. Ainsi le polynôme $(1 - X^2)S_m(X)P_j(X)$ admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. Or c'est faux car $(1 - X^2)S_m P \neq 0$.
On peut donc conclure que $\boxed{m = j}$.

(d) On a donc que $\deg(S_m) = j$. Mais en reprenant les calculs du 4.(a), on obtient donc que $\deg(Q) = 0$, et donc que $Q = \lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi on a $P = \lambda S_m = S_m$ car les polynômes sont unitaires. On peut donc conclure que P_j admet j racines simples réelles toutes situées dans l'intervalle $]-1, 1[$.