DS5

Devoir Surveillé du 16/12/2019

Durée : 3h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$, élément de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   Montrer que la matrice A soit diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $x^2 - y > 0$.

2. Dans la suite, X et Y sont des variables aléatoires réelles, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes et qui suivent toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$. On note F_X (respectivement F_Y) la fonction de répartition de X (resp. Y).

   (a) Déterminer une densité de X^2.

   (b) Déterminer une densité de $-Y$ (on ne demande pas de vérifier que $-Y$ est une variable aléatoire à densité).

   (c) En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :
$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

   (d) Déterminer enfin la probabilité que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2

Partie 1 : Étude d'un exemple

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.

   (b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).

   (c) En `Scilab`, la commande `r=rank(M)` renvoie dans la variable `r` le rang de la matrice M. On a saisi :

```
A=[1,0,0;-2,3,-2;-1,1,0]
r1=rank(A-eye(3,3))
r2=rank(A-2*eye(3,3))
disp(r1,'r1=')
disp(r2,'r2=')
```

`Scilab` a renvoyé :

```
r1 =
     1.
r2 =
     2.
```

Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés ?

(d) Donner une base de chacun des noyaux $\mathrm{Ker}(f-\lambda_1 Id)$ et $\mathrm{Ker}(f-\lambda_2 Id)$.

2. (a) Justifier qu'il existe une base (u_1, v_1, v_2) de $\mathbb{R}^3$, où (u_1, v_1) est une base de $\mathrm{Ker}(f-\lambda_1 Id)$ et (v_2) une base de $\mathrm{Ker}(f-\lambda_2 Id)$. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de v_1 étant nulles.

   (b) On note $x=(a,b,c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de a, b et c les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2).

Partie 2 : généralisation

Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p \geq 2$, soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme diagonalisable de E ayant p valeurs propres, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, deux à deux distinctes.

On se propose de déterminer la décomposition de chaque vecteur x de E sur la somme directe $\displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(f-\lambda_k Id)$, où Id désigne l'endomorphisme identité de E.

3. Soit $\mathscr{B}$ une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D.

   (a) En notant I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :

   $$(D-\lambda_1 I_n)(D-\lambda_2 I_n)\ldots(D-\lambda_p I_n) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.$$

   (b) En déduire un polynôme annulateur de f.

Pour chaque k de $[\![1,p]\!]$, on définit le polynôme $L_k = \displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} \frac{X-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j}$.

4. (a) En distinguant les cas $i=k$ et $i \neq k$, calculer $L_k(\lambda_i)$.

   (b) Montrer que $(L_1, L_2, \ldots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

   (c) Établir alors que :

   $$\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X],\ \ P = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k) L_k.$$

   (d) En déduire que $\sum_{i=1}^{P} L_i = 1$.

5. (a) Montrer que, pour tout x de E, $L_k(f)(x)$ appartient à $\text{Ker}(f - \lambda_k Id)$, où $L_k(f)(x)$ désigne l'image du vecteur x de E par l'endomorphisme $L_k(f)$.
   (b) En déduire la décomposition cherchée.
6. Vérifier que cette dernière décomposition redonne celle obtenue pour l'endomorphisme f de la partie 1, si l'on choisit $n = 3$, $E = \mathbb{R}^3$ et $p = 2$.

Problème.
On note n un nombre entier fixé supérieur ou égal 2, E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n et $\mathscr{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.

I. Étude d'un endomorphisme de E

1. Montrer que, pour tout polynôme P de E, le polynôme $\big((X^2-1)P\big)''$ est élément de E, où $\big((X^2-1)P\big)''$ désigne le polynôme dérivée seconde de $(X^2-1)P$.

   On note $\Phi \ : \ E \to E$ l'application qui, à tout polynôme P de E, associe
   $$\Phi(P) = \big((X^2-1)P\big)''.$$
2. Vérifier : $\quad \Phi(1) = 2, \quad \Phi(X) = 6X$.
3. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
4. Calculer $\Phi(X^k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et écrire la matrice A de Φ dans la base $\mathscr{B}$.
5. (a) Montrer que Φ admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes que l'on notera $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$.
   (b) Est-ce que Φ est bijectif ?
   (c) Montrer que Φ est diagonalisable et déterminer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la dimension du sous-espace propre de Φ associé à λ_k.
6. Soient $k \in [\![0, n]\!]$ et P un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ_k.
   (a) Montrer que le degré du polynôme P est égal à k.
   (b) Montrer que le polynôme Q défini par $Q(X) = P(-X)$ est un vecteur propre de Φ associé à λ_k.
7. En déduire qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de E constituée de vecteurs propres de Φ telle que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est un polynôme de degré k, de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$.

   Que peut-on en déduire sur la parité de P_k ?
8. Calculer P_0, P_1, P_2, P_3.

II. Un produit scalaire sur E

1. Montrer que l'application : $(P,Q) \mapsto (P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur E. On munit dorénavant E de ce produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$.

2. (a) À l'aide d'intégrations par parties, établir que $(\Phi(P)|Q) = (P|\Phi(Q))$ pour tout $P, Q \in E$.

   (b) Montrer que la base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de E obtenue à la question I.7 est orthogonale.

3. Soit $j \in [\![1, n]\!]$.

   (a) Montrer que pour tout polynôme S de degré inférieur ou égal à $j-1$, on a : $(S|P_j) = 0$.

   (b) En considérant $(1|P_j)$, montrer que P_j ne garde pas un signe constant sur l'intervalle $]-1;1[$.

   (c) En déduire que P_j admet au moins, dans l'intervalle $]-1;1[$, une racine d'ordre de multiplicité impair.

4. Soit toujours $j \in [\![1, n]\!]$. On note $\{x_1, \ldots, x_m\}$ l'ensemble des racines d'ordre de multiplicité impair de P_j appartenant à l'intervalle $]-1;1[$ et $S_m = (X-x_1)(X-x_2)\ldots(X-x_m)$.

   (a) Justifier : $m \leq j$.

   (b) Montrer que le polynôme S_mP_j (produit des polynômes S_m et P_j) garde un signe constant sur l'intervalle $]-1;1[$.

   (c) En considérant $(S_m|P_j)$, montrer que $m = j$.

   (d) En déduire que P_j admet j racines simples réelles toutes situées dans l'intervalle $]-1,1[$.
