DS6

Correction du devoir surveillé

Exercice 1 (Ecricome 2013)

1. (a) f est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x,y) = \frac{1}{5}(2x - 4x^3 + 2y, 2y - 4y^3 + 2x)$$

Soit (a,b) un point critique de f. $\nabla f(a,b) = (0,0)$ équivaut à :

$$\begin{cases} a - 2a^3 + b = 0 & (L_1) \\ b - 2b^3 + a = 0 & (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2a^3 + b = 0 & (L_1) \\ 2(a^3 - b^3) = 0 & (L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1) \end{cases} \underset{x \mapsto x^3 \text{ bij.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2a - 2a^3 = 0 & (L_1) \\ a = b & (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(1-a)(1+a) = 0 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Les points critiques de } f \text{ sont } (-1,-1),\ (0,0) \text{ et } (1,1).}$ De plus on a :

$$\boxed{f(-1,-1) = f(1,1) = \frac{2}{5} \text{ et } f(0,0) = 0.}$$

(b) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions dérivables, et on a $g' : t \mapsto \dfrac{2-t}{5}$.

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$2/5$	$\searrow$	$-\infty$

$\boxed{g \text{ admet } 0 \text{ pour minimum local, non global, et } 2/5 \text{ comme maximum local.}}$

(c) On observe, par la majoration admise dans l'énoncé, que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \leq g(x^2+y^2) \leq \frac{2}{5} = f(-1,-1) = f(1,1).$$

Donc $\boxed{f \text{ admet un maximum global égal à } 2/5, \text{ atteint exactement en } (-1,-1) \text{ et } (1,1).}$

D'autre part, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,0) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x^4}{5} = -\infty$. Donc $\boxed{f \text{ n'est pas minorée.}}$

2. On propose la fonction suivante.

```
function u=suite(N,a,b)
  u=a
  v=b
  for k=1:N
    w=0.2*[(u^2)*(1-u^2)+(v^2)*(1-v^2)+2*u*v]
    u=v
    v=w
  end
endfunction
```

3. (a) Notons pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $u_n \in [0,1]$ ».

Initialisation. Pour $n=0$ et $n=1$, cela provient directement de l'énoncé, donc $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vraies.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ vraies. Montrons que $\mathscr{P}_{n+2}$ est également vraie.

$\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ entraînent :

$$0 \leq u_n^2(1-u_n^2) \quad ; \quad 0 \leq u_{n+1}^2(1-u_{n+1}^2) \quad ; \quad 0 \leq u_n u_{n+1}.$$

Ainsi on a $0 \leq f(u_n, u_{n+1})$. Et comme f est majorée par $\frac{2}{5}$, on a aussi $f(u_n, u_{n+1}) \leq 1$. Finalement $u_{n+2} \in [0,1]$ et $\mathscr{P}_{n+2}$ est vraie.

Conclusion Par principe de récurrence, on a donc que $\boxed{\forall n \geq 0, \quad 0 \leq u_n \leq 1.}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les inégalités $0 \leq u_n \leq 1$ et $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ donnent :

$$u_n^2 \leq u_n \text{ et } u_{n+1}^2 \leq u_{n+1}.$$

La majoration de f donnée à la question 1. assure alors $\boxed{u_{n+2} \leq \frac{2}{5}(u_n^2 + u_{n+1}^2) \leq \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1})}$

(b) Soit, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathscr{Q}_n$ la propriété : « $u_n \leq a_n$ ».

Initialisation. L'énoncé assure $\mathscr{Q}_0$ et $\mathscr{Q}_1$ vraie puisque $u_0 = a_0$ et $u_1 = a_1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{Q}_{n-1}$ et $\mathscr{Q}_n$ vraies.

On a $u_{n+1} \leq \frac{2}{5}(u_{n+1} + u_n)$ par 3.(a). Donc $u_{n+1} \leq \frac{2}{5}(a_{n-1} + a_n)$ par hypothèse de récurrence, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq a_{n+1}$. Donc $\mathscr{Q}_{n+1}$ est vraie.

Par principe de récurrence, on a donc que $\boxed{\forall n \geq 0, \quad u_n \leq a_n.}$

(c) La suite a vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, d'équation caractéristique $5x^2 - 2x - 2 = 0$, dont les solutions sont :

$$r = \frac{2 - 2\sqrt{11}}{10} \text{ et } s = \frac{2 + 2\sqrt{11}}{10}.$$

D'après le théorème du cours, $\boxed{\text{il existe } \lambda \text{ et } \mu \text{ tels que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n + \mu s^n.}$

Comme $3 < \sqrt{11} < 4$, on a : $0 < 2 + 2\sqrt{11} < 10$ et $-6 < 2 - 2\sqrt{11} < 0$, et donc $|r| < 1$ et $|s| < 1$. On en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} r^n = \lim_{n \to +\infty} s^n = 0 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} a_n = 0.$$

Comme on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq a_n$, on en déduit par le théorème des gendarmes que $\boxed{(u_n)_{n \geq 0} \text{ converge et } \lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$

Exercice 2 (Edhec 2013)

1. Comme $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M) = 2$, $\mathrm{Im} f$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. De plus, on a :

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f((0,0,1), f(0,1,0), f(0,0,1)) = \mathrm{Vect}((1,0,0),(2,3,0)).$$

Or $f((1,0,0)) = (0,0,0) \in \mathrm{Im} f$ et $f((2,3,0)) = (3,0,0) \in \mathrm{Im} f$. Donc $\mathrm{Im} f$ est stable par f.

$$\boxed{\mathrm{Im} f \text{ est un hyperplan de } \mathbb{R}^2 \text{ stable par } f.}$$

Remarque. C'est en fait vrai pour n'importe quel endomorphisme f puisque pour tout $y \in \mathrm{Im} f$, $f(y)$ est bien dans $\mathrm{Im} f$ par définition de l'image d'un endomorphisme.

2. (a) On peut ici déterminer les valeurs propres à vue :
   - La somme des coefficients sur chaque ligne de M valant 4, on a
   $$f((1,1,1)) = (4,4,4) = 4(1,1,1).$$
   Donc 4 est une valeur propre de f et on a $\dim E_4(f) \geq 1$.
   - $\text{rg}(M - I_3) = 1$, donc 1 est une valeur propre de f et par le théorème du rang $\dim E_1(f) = 3 - 1 = 2$.

   Comme les sous-espaces sont en somme directe, il n'y a pas d'autre valeur propre puisque nous avons déjà $\dim E_4(f) + \dim E_1(f) \geq 3$. Nous pouvons même affirmer que $\dim E_4(f) = 1$.
   $$\boxed{\text{Les valeurs propres de } f \text{ sont 1 et 4.}}$$
   Remarque. On peut aussi déterminer $\text{rg}(M - \lambda I_3)$ par la méthode de Gauss pour trouver ces valeurs propres, mais le calcul est plus difficile.

   (b) $\text{Ker}(f - Id) = E_1(f)$ donc $\dim \text{Ker}(f - id) = 2$ et $\text{Ker}(f - Id)$ est stable par f, comme tout sous-espace propre de f.
   $$\boxed{\text{Ker}(f - Id) \text{ est un hyperplan de } \mathbb{R}^3 \text{ stable par } f.}$$

3. (a) *Remarque préliminaire.* Comme $\mathscr{B}$ est une base **orthonormale** de E, on rappelle que :
   $$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle x, y \rangle = {}^tXY$$
   avec $X = M_{\mathscr{B}}(x) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = M_{\mathscr{B}}(y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   Soit $(x,y) \in E^2$, et notons $X = M_{\mathscr{B}}(x) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = M_{\mathscr{B}}(y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $M = M_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a :
   $$\langle f(x), y \rangle = {}^t(MX)Y = {}^tX\,{}^tMY = {}^tX({}^tMY) = \langle x, f^*(y) \rangle.$$
   $$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.}$$

   (b) Soit g un endomorphisme de E vérifiant aussi la propriété précédente. Montrons que $g = f$.

   Méthode 1. Rappelons que comme $\mathscr{B}$ est une base **orthonormale** de E, on a :
   $$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$
   Ici on obtient pour tout x de E :
   $$f^*(x) - g(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle f^*(x), e_k \rangle e_k - \sum_{k=1}^{n} \langle g(x), e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^{n} \langle x, f(e_k) \rangle e_k - \sum_{k=1}^{n} \langle x, f(e_k) \rangle e_k = 0.$$
   Donc on a bien $f^* = g$.

   Méthode 2. Pour tout $x, y \in E$, on a :
   $$\langle x, f^*(y) - g(y) \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle - \langle x, g(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle - \langle f(x), y \rangle = 0$$
   Donc $f^*(y) - g(y)$ est orthogonal à tout vecteur de E. Il est donc en particulier orthogonal à lui-même (raisonnement fait en cours) et on a pour tout $y \in E$:
   $$\|f^*(y) - g(y)\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f^*(y) = g(y).$$
   Ainsi on a bien $f^* = g$.

$$\boxed{f^* \text{ est l'unique endomorphisme de } E \text{ vérifiant } \forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle.}$$

Remarque. f^* s'appelle *l'endomorphisme adjoint* de f, notion hors programme.

4. (a) Toujours en notant M la matrice représentant f dans $\mathscr{B}$, on a :

$$\lambda \in Spec(f) \Rightarrow \mathrm{rg}(M - \lambda I_n) < n \Rightarrow \mathrm{rg}(\,^t(M - \lambda I_n)) < n \Rightarrow \mathrm{rg}(\,^tM - \lambda I_n) < n$$
$$\Rightarrow \mathrm{rg}(f^* - \lambda id) < n \Rightarrow \lambda \in Spec(f^*).$$

$$\boxed{\lambda \text{ est une valeur propre de } f^*.}$$

(b) i. φ est bien linéaire par linéarité à gauche du produit scalaire, à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc c'est une forme linéaire sur E. De plus on a :

$$\varphi(u) = \langle u, u\rangle = \|u\|^2 \neq 0$$

car $u \neq 0_E$ puisque c'est un vecteur propre.

$$\boxed{\varphi \text{ est bien une forme linéaire non nulle sur } E.}$$

ii. $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$ puisque φ est non nulle. Donc on a $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$. Par le théorème du rang, on en déduit que :

$$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n - 1.$$

Donc $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E.

Montrons que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est stable par f. Soit pour cela $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Montrons que $f(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(\varphi)$. On a :

$$\varphi(f(x)) = \langle f(x), u\rangle = \langle x, f^*(u)\rangle = \langle x, \lambda \cdot u\rangle = \lambda\langle x, u\rangle = \lambda\varphi(x) = 0.$$

Ainsi on a bien que $f(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) \text{ est un hyperplan de } E \text{ stable par } f.}$$

Remarque. On avait montré dans le **Complément de cours 2. Formes linéaires et hyperplans.** que le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan. On l'a redémontré ici.

Problème (Ecricome 2015)

Partie A

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F_n(x) = P(Y_n \leq x) = 1 - P(Y_n > x) = 1 - P\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} [X_i > x]\right).$$

Par indépendance des (X_i), on a :

$$F_n(x) = 1 - \left(\prod_{i=1}^{n} P(X_i > x)\right) = 1 - \left(\prod_{i=1}^{n} (1 - F(x))\right) = 1 - (1 - F(x))^n.$$

Ainsi on a bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n.}$$

2. Si X admet une densité f, alors sa fonction de répartition F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points, et continue sur $\mathbb{R}$. Par théorème d'opérations sur les applications $\mathscr{C}^1$ et continues, il en est de même pour :

$$F_n : x \mapsto 1 - (1 - F(x))^n.$$

Donc Y_n admet une densité. De plus, pour tout x où F est dérivable, on a :

$$F_n'(x) = nf(x)\,(1 - F(x))^{n-1}.$$

Donc une densité de Y_n est donnée par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nf(x)\,(1 - F(x))^{n-1}.}$$

3. (a) Soit $x \geq 0$. Procédons à une intégration par parties à l'aide des fonctions $u : t \mapsto -(1-\Phi(t))$ et $v : t \mapsto t$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, x]$. Comme $u' = \varphi$ et $v' = 1$, on a :

$$\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t = [-t(1 - \Phi(t))]_0^x - \int_0^x -(1 - \Phi(t))\,\mathrm{d}t$$

Donc on obtient :

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad \int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_0^x (1 - \Phi(t))\,\mathrm{d}t - x(1 - \Phi(x)).}$$

(b) On observe que, pour $x \geq 0$,

$$0 \leq x(1 - \Phi(x)) = x\int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} x\varphi(t)\mathrm{d}t \leq \int_x^{+\infty} t\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Comme $E(V)$ existe, $\displaystyle\int_x^{+\infty} t\varphi(t)\mathrm{d}t$ est le reste de l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\mathrm{d}t$, donc on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} t\varphi(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Par encadrement, on obtient :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x(1 - \Phi(x)) = 0.}$$

De $\displaystyle\int_0^x (1 - \Phi(t))\mathrm{d}t = \int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t + x(1 - \Phi(x))$, il découle alors

$$\int_0^x (1 - \Phi(t))\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} E(V).$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\mathrm{d}t \text{ converge (et vaut } E(V)).}$$

(c) *Première méthode.* Supposons $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\mathrm{d}t$ convergente. Pour $x \geq 0$, $-x(1-\Phi(x)) \leq 0$, donc par 3.(a) et puisque $1 - \Phi \geq 0$,

$$0 \leq \int_0^x t\phi(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^x (1 - \Phi(t))\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\mathrm{d}t.$$

Or $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t\phi(t)\mathrm{d}t$ est une fonction croissante car $t \mapsto t\phi(t)$ est positive. Cette fonction est croissante et majorée, donc converge en $+\infty$. Donc on a :

$$\boxed{E(V) \text{ existe (et vaut } \int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t \text{ d'après (b)).}}$$

Seconde méthode.
Supposons $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t$ convergente. Pour gagner, il suffirait de démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,(1-\Phi(x)) = 0$. Par décroissance et positivité de $1-\Phi$,

$$0 \leq \frac{x}{2}(1-\Phi(x)) = \int_{x/2}^{x} 1-\Phi(x)\mathrm{d}t \leq \int_{x/2}^{x} (1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t \leq \int_{x/2}^{+\infty} (1-\Phi(t))\mathrm{d}t.$$

Or l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))$ entraîne $\displaystyle\int_{x/2}^{+\infty} (1-\Phi(t))\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

La question 3.(a) entraîne alors l'existence de $E(V)$, qui vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\mathrm{d}t$.

$$\boxed{E(V) \text{ existe (et vaut } \int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\mathrm{d}t\text{).}}$$

(d) En 3.(b) nous avons démontré une implication et en 3.(c) l'implication réciproque, donc le résultat cherché est établi :

$$\boxed{E(V) \text{ existe si, et seulement si, } \int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

$$\boxed{\text{Et en cas d'existence, } E(V) = \int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\mathrm{d}t.}$$

Partie B.

4. (a) Notons que f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et positive si α est positif... ce que nous ne manquerons pas de vérifier. Pour $A > 0$, on a :

$$\int_{-\infty}^{A} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x = [\alpha \arctan(x)]_0^A = \alpha \arctan(A).$$

Comme $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \arctan(A) = \frac{\pi}{2}$, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$ si, et seulement si, $\alpha = \dfrac{2}{\pi}$. Et cette valeur est bien positive. Ainsi on prendra :

$$\boxed{\alpha = \frac{2}{\pi}}$$

(b) Par le calcul précédent, on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{2}{\pi}\arctan(x) & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(c) Par 1. et 2., on sait que Y_2 est à densité et on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \left(1 - \dfrac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^2 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{4}{\pi(1+x^2)}\left(1 - \dfrac{2}{\pi}\arctan(x)\right) & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(d) Soit $g : \begin{cases}]\,0\,;\,+\infty\,[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{cases}$. Comme arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto 1/x$ est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, g est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par composition. De plus, on a pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(\frac{-1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Donc g est constante sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$. Comme de plus, $g(1) = 2\arctan(1) = 2 \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$, on en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.}$$

(e) Il découle de (d) que pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{2}{\pi}\arctan(x) = 1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

et donc que :

$$f_2(x) = \frac{8}{\pi^2(1+x^2)}\arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

On a $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\arctan(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$. D'où l'équivalent :

$$\boxed{f_2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{8}{\pi^2 x^3}.}$$

(f) $E(Y_2)$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x f_2(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge car la fonction intégrée est positive. Comme $x \mapsto x f_2(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale est généralisée en $+\infty$. On a :

- $x f_2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{8}{\pi^2 x^2}$,
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente,
- les fonctions considérées sont continues positives sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$.

Par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} x f_2(x)\mathrm{d}x$ converge.

On peut donc conclure que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_2(x)\mathrm{d}x$ converge (absolument car la fonction intégrée est positive), et donc que Y_2 admet une espérance.

D'autre part, on a $x f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\pi x}$. Par un raisonnement analogue, où cette fois l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ diverge, on montre que X n'a pas d'espérance. Par définition, on a donc que :

$$\boxed{X \text{ est implosive et son indice d'implosion est } 2.}$$

5. (a) Soit $N \in \mathbb{N}$. Par un télescopage immédiat, on a :

$$\sum_{k=0}^{N} P(X=k) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{N+2}} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1.$$

Ainsi on a bien :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1.}$$

(b) Commençons par chercher un équivalent de $P(X=k)$ en $+\infty$.

$$P(X=k)=\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(1-\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(1-\sqrt{\frac{k+2-1}{k+2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{k+2}}\right).$$

Comme $(1+u)^\alpha-1\underset{u\to+\infty}{\sim}\alpha u$, on a $\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{k+2}}\right)\underset{k\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{2}\times\frac{-1}{k+2}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2k}$, d'où

$$P(X=k)\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2k\sqrt{k}}.$$

Il s'ensuit que $kP(X=k)\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2\sqrt{k}}$. Par la règle des équivalents pour les séries à termes positifs, $\sum_{k\geq 1}kP(X=k)$ est de même nature que $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{2\sqrt{k}}$, qui est une série de Riemann divergente ($\alpha=1/2<1$).

$$\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$

(c) Comme en (a), toujours par télescopage, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$P(X\leq k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{\sqrt{i+1}}-\frac{1}{\sqrt{i+2}}=1-\frac{1}{\sqrt{k+2}}$$

Ainsi on a :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\quad F(k)=1-\frac{1}{\sqrt{k+2}}.}$$

(d) On a $Y_2(\Omega)=\mathbb{N}$. Soit $k\in\mathbb{N}$. Par 1., on a

$$P(Y_2\leq k)=1-(1-F(k))^2=1-\frac{1}{k+2}.$$

Cette formule est aussi valable pour $k=-1$.

Comme $[Y_2\leq k]=[Y_2=k]\cup[Y_2\leq k-1]$ avec incompatibilité des événements $[Y_2=k]$ et $[Y_2\leq k-1]$, on a :

$$P(Y_2=k)=P(Y_2\leq k)-P(Y_2\leq k-1)=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Ainsi on a : $\boxed{Y_2(\Omega)=\mathbb{N},\text{ et }\forall k\in\mathbb{N},\quad P(Y_2=k)=\frac{1}{(k+1)(k+2)}.}$

Par conséquent, $kP(Y_2=k)\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{k}$, et par le critère des équivalents pour les séries à terme général positif, puisque $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}$ est une série de Riemann divergente, $\sum_{k\geq 0}kP(Y_2=k)$ diverge.

$$\boxed{Y_2 \text{ n'a pas d'espérance.}}$$

(e) On a $Y_3(\Omega)=\mathbb{N}$. Soit $k\in\mathbb{N}$. Par 1., on a :

$$P(Y_3\leq k)=1-(1-F(k))^3=1-\frac{1}{(k+2)^{3/2}}.$$

Cette formule est aussi valable pour $k=-1$.

Comme $[Y_3\leq k]=[Y_3=k]\cup[Y_3\leq k-1]$ avec incompatibilité des événements $[Y_3=k]$ et $[Y_3\leq k-1]$, on a :

$$P(Y_3=k)=P(Y_3\leq k)-P(Y_3\leq k-1)=\frac{1}{(k+1)^{3/2}}-\frac{1}{(k+2)^{3/2}}.$$

Ainsi on a : $\boxed{Y_3(\Omega) = \mathbb{N}, \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Y_3 = k) = \frac{1}{(k+1)^{3/2}} - \frac{1}{(k+2)^{3/2}}.}$

On a $P(Y_3 = k) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2k^{5/2}}$, par un raisonnement analogue à 5.(b) (essayez de la faire !). Par conséquent, $kP(Y_2 = k) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2k^{3/2}}$, et par le critère des équivalents pour les séries à terme général positif, puisque $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente, $\sum_{k\geq 0} kP(Y_3 = k)$ converge.

$\boxed{Y_3 \text{ admet une espérance.}}$

(f) Les trois résultats précédents montre que :

$\boxed{X \text{ est implosive, d'indice d'implosion } 3.}$

Partie C

6. (a) Soit $A \geq 1$. On a :

$$\int_1^A f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{a}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right]_1^A = \frac{a}{\alpha-1} - \frac{a}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{a}{\alpha-1} \text{ car } \alpha - 1 > 0.$$

En prenant $a = \alpha - 1$, f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, positive sur $\mathbb{R}$ et d'intégrale sur $\mathbb{R}$ valant 1.

$\boxed{a = \alpha - 1 \text{ convient (et c'est le seul).}}$

(b) Par le calcul intégral précédent, on a :

$$\boxed{F : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}} & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(c) Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ se réduit à l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}}\mathrm{d}x$, on a directement :

$\boxed{E(X) \text{ existe si, et seulement si, } \alpha > 2.}$

(d) Par 1., une densité f_n de Y_n est donnée par :

$$f_n(x) = nf(x)(1-F(x))^{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{na}{x^\alpha}\frac{1}{(x^{\alpha-1})^{n-1}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

$E(Y_n)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{na}{(x^{\alpha-1})^n}\,\mathrm{d}x$ converge (absolument), la fonction intégrée étant positive. On reconnait ici une intégrale de Riemann en $+\infty$ qui converge si et seulement si $n\alpha - n > 1$, soit $\alpha > 1 + \frac{1}{n}$. Ainsi :

$\boxed{E(Y_n) \text{ existe si, et seulement si, } \alpha > 1 + \frac{1}{n}.}$

(e) Pour que X soit implosive d'indice $m \geq 2$ donné, il faut et suffit que $1+\frac{1}{m} < \alpha \leq 1+\frac{1}{m-1}$. $\alpha = 1 + \frac{1}{m-1}$ convient (par exemple).

$\boxed{\text{Pour } m \geq 2,\ \alpha = 1 + \frac{1}{m-1} \text{ donne une variable } X \text{ implosive d'ordre } m.}$

Partie D

7. (a) Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x\ln^2(x)}$ (du type $\frac{u'}{u^2}$) sur $[\,2\,;+\infty\,[$ est $x \mapsto -\frac{1}{\ln(x)}$.

Donc pour $A \geq 2$, on a :

$$\int_{-\infty}^{A} f(x)\mathrm{d}x = \frac{-a}{\ln(A)} + \frac{a}{\ln(2)} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{a}{\ln(2)}.$$

Alors avec $a = \ln(2)$, f est une densité (continue sauf en 2 et positive).

$\boxed{a = \ln(2) \text{ convient (et c'est la seule valeur).}}$

(b) Par le calcul précédent, on a :

$$\boxed{F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ 1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(x)} & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(c) $\dfrac{1/x}{xf(x)} = \dfrac{\ln^2(x)}{x\ln(2)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{1}{x} = o\left(xf(x)\right)$ en $+\infty$. Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ diverge, le critère de négligeabilité pour ces fonctions positives assure la divergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$.

$\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

(d) D'après la question 1., une densité de Y_n est donnée, pour $x \geq 2$, par :

$$f_n(x) = n\frac{\ln(2)}{x\ln^2(x)}\left(\frac{\ln(2)}{\ln(x)}\right)^{n-1} = n\frac{\ln^n(2)}{x\ln^{n+1}(x)}.$$

Alors $\dfrac{1/x}{xf_n(x)} = \dfrac{\ln^{n+1}(x)}{xn\ln^n(2)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{1}{x} = o\left(xf_n(x)\right)$ en $+\infty$.

On conclut comme dans la question précédente que :

$\boxed{\text{pour tout } n \geq 2, Y_n \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

(e) X est une variable positive sans espérance et pour laquelle aucune des variables Y_n n'a d'espérance.

$\boxed{X \text{ n'est pas implosive.}}$

Partie E

8. On note F_Y la fonction de répartition de Y. Par 1., on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n.$$

Ainsi on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_Y(x) = 1 - (1-F(x))^n \Leftrightarrow (1-F(x))^n = 1 - F_Y(x) \Leftrightarrow 1 - F(x) = (1 - F_Y(x))^{1/n}$$

On peut conclure que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = 1 - (1 - F_Y(x))^{1/n}.}$

9. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $1 - F_Y(k) = P(Y > k) = (1-p)^k$ (probabilité d'obtenir k échecs consécutifs !).

S'il existe une variable X implosant sur Y à l'ordre m,

$$F(k) = 1 - (1-p)^{k/m} = 1 - \left[(1-p)^{1/m}\right]^k.$$

Cette formule est de plus valable pour $k = 0$. On obtient alors que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = k) = F(k) - F(k-1) = \left[(1-p)^{1/m}\right]^{k-1} - \left[(1-p)^{1/m}\right]^k = \left[(1-p)^{1/m}\right]^{k-1}(1 - (1-p)^{1/m}).$$

Donc X suit la loi géométrique de paramètre $1 - (1-p)^{1/m}$. Mais X n'est alors pas implosive, car elle possède une espérance.

$\boxed{\text{Il n'existe pas de variable } X \text{ implosant sur } Y.}$

10. Soit $\alpha = 1 + \dfrac{1}{m-1}$, X de loi décrite dans la partie C, Y de même loi que Y_m.

$$\boxed{X \text{ implose sur } Y \text{ avec un indice d'implosion } m.}$$

11. Par hypothèse et d'après 8., $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = 1 - (1 - G(x))^{1/m}$.

Soit $k \leq m$ et soit X' une variable aléatoire admettant pour fonction de répartition H définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H(x) = 1 - (1 - F(x))^{m/k}.$$

- On vérifie sans peine que H est une fonction de répartition continue, car F l'est. En effet, H est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en un nombre fini de points, de limite nulle en $-\infty$ et de limite 1 en $+\infty$. Enfin, F étant croissante, $1 - F$ est décroissante, donc $(1 - F)^{m/k}$ aussi, et du coup H est croissante.

  On note Y_i' pour $1 \leq i \leq k$ la variable $\min(X_1', \ldots, X_i')$ où $X_1', \ldots, X_k'$ sont de même loi que X' et indépendantes.

- On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{Y_k'}(x) = 1 - (1 - H(x))^k = 1 - (1 - F(x))^m = F_{Y_m}(x).$$

  Donc Y_k' possède une espérance, égale à celle de Y_m, et Y_k' suit la loi de Y_m, donc de Y.

- Soit $1 \leq i < k$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{Y_i'}(x) = 1 - (1 - H(x))^i = 1 - (1 - F(x))^{mi/k}.$$

  Donc on a $1 - F_{Y_i'}(x) = (1 - F(x))^{mi/k}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or $\dfrac{mi}{k} \leq m\dfrac{k-1}{k} \leq m - \dfrac{m}{k} \leq m - 1$ puisque $\dfrac{m}{k} \geq 1$, donc on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - F_{Y_i'}(x) \geq (1 - F(x))^{m-1}$$

  car $0 \leq 1 - F(x) \leq 1$. Or puisque $E(Y_{m-1})$ diverge, par la partie A, $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F(x))^{m-1} \mathrm{d}x$ diverge. Et par comparaison des fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F(x))^{mi/k} \mathrm{d}x$ diverge, donc $E(Y_i')$ n'a pas d'espérance.

- En particulier pour $i = 1$, $Y_1' = X'$ n'a pas d'espérance.

Ainsi X' est implosive, implose sur Y, avec un indice d'implosion valant k.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![2, m]\!], \text{ il existe } X' \text{ implosant sur } Y, \text{ d'indice } k.}$$

Partie F

12. L'énoncé est peut-être un peu vague. X est a priori positive d'après le début de l'énoncé. Doit-on supposer que X admet une espérance dans la définition de l'explosivité ? Voici une réponse pour les deux cas.

- Si X n'a pas d'espérance, alors $0 \leq X \leq Z_n$ entraîne que Z_n n'a pas d'espérance (sinon, X admettrait une espérance par domination). Dans ce cas, son indice d'explosivité est $m = 2$.

$$\boxed{\text{Si } X \text{ n'admet pas d'espérance, alors } X \text{ est explosive d'indice 2.}}$$

- Si X possède une espérance, alors $X_1 + \cdots + X_n$ admet une espérance par linéarité. Or on a :

$$0 \leq Z_n \leq X_1 + \cdots + X_n,$$

  ce qui entraîne que Z_n admet une espérance par domination. Ceci étant vrai pour tout n de $\mathbb{N}^*$, X n'est pas explosive.

$$\boxed{\text{Si } X \text{ admet une espérance, alors } X \text{ n'est pas explosive.}}$$

On peut en outre conclure que :

$$\boxed{\text{Si } m \geq 3\text{, il n'existe pas de variable explosive d'indice } m.}$$

13. D'après ce qui précède, toute variable positive possédant une espérance fait l'affaire... et comme il en existe (lois exponentielle, γ, binomiale, géométrique, de Poisson...), on peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{Il existe des variables qui ne sont pas explosives.}}$$