DS6

Devoir Surveillé du 10/01/2020

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

On considère :

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \dfrac{1}{5}\left[x^2(1-x^2) + y^2(1-y^2) + 2xy\right].$
- la suite (u_n) définie par : $\forall n \geq 0, \quad u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \quad$ avec $\quad (u_0, u_1) \in [0,1]^2$.

1. **Étude de f.**
   (a) Si (a,b) est un point critique de f, justifier que $a = b$ puis déterminer tous les points critiques de f ainsi que la valeur de f en chacun de ses points critiques.

   On admettra dans la suite que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \leq \dfrac{2}{5}(x^2+y^2) - \dfrac{1}{10}(x^2+y^2)^2.$

   (b) Préciser le ou les extremums de la fonction $g : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{2t}{5} - \dfrac{t^2}{10}$.

   (c) Démontrer que la fonction f possède un maximum et qu'elle n'est pas minorée.

2. Écrire une fonction `Scilab` qui prend comme paramètres un entier N et les valeurs de u_0 et u_1 et retourne la valeur de u_N correspondante.

3. **Étude de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.**
   On considère la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{2}{5}(a_n + a_{n+1}) \quad \text{avec } a_0 = u_0 \text{ et } a_1 = u_1.$$
   (a) Démontrer que : $\forall n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 1$.
   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \leq \dfrac{2}{5}(u_n + u_{n+1})$.

   (b) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq a_n$.

   (c) Établir l'existence de quatre réels λ, μ, r, s tels que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda r^n + \mu s^n$$
   puis étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par E un espace vectoriel de dimension n et on rappelle qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.
Pour finir, on désigne par Id l'endomorphisme identité de E.

1. Étude d'un premier exemple ($n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$).
   On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{Im} f$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est stable par f.

2. Étude d'un deuxième exemple ($n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$).
   On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer les valeurs propres de f.

(b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - Id)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est stable par f.

On suppose dans la suite que E est un espace euclidien de dimension n, et on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.

Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.

On considère un endomorphisme f de E qui possède au moins une valeur propre λ réelle et on se propose de démontrer qu'il existe un hyperplan de E stable par f.

3. On note f^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la transposée de la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

   (a) Vérifier que l'on a : $\forall (x, y) \in E \times E, \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.

   (b) Établir que f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant :
   $$\forall (x, y) \in E \times E, \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle.$$

4. (a) Montrer que λ est valeur propre de f^*.

   (b) On considère un vecteur propre u de f^* associé à la valeur propre λ, et on pose $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle x, u\rangle \end{array} \right.$.

      i. Montrer que φ est une forme linéaire non nulle sur E.

      ii. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E qui est stable par f.

Problème

Les variables aléatoires introduites dans ce problème sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Dans tout le problème, on considère X une variable aléatoire à valeurs positives, et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi que X.

On note pour tout entier $n \geqslant 2$, $Y_n = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, autrement dit :
$$\forall \omega \in \Omega,\ Y_n(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

On dit que la loi de X est **implosive** si X n'admet pas d'espérance et s'il existe un entier $m \geqslant 2$ tel que Y_m admet une espérance.

Si la loi de X est implosive, on appelle **indice d'implosion de** X le plus petit entier $m \geqslant 2$ tel que Y_m admet une espérance.

On notera F la fonction de répartition de X et F_n la fonction de répartition de Y_n pour tout entier $n \geqslant 2$.

Dans le cas où X (respectivement Y_n) admet une densité, on la notera f (resp. f_n).

Partie A - Résultats préliminaires

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, la fonction de répartition de Y_n est donnée par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n.$$

2. On suppose dans cette question que X admet une densité f. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, Y_n admet une densité f_n et que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = nf(x)\,(1 - F(x))^{n-1}.$$

3. On souhaite prouver dans cette question que pour une variable aléatoire positive V admettant une densité φ continue sur $\mathbb{R}_+$ et dont on note la fonction de répartition Φ, on a l'équivalence suivante :
$$V \text{ admet une espérance} \iff \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\,\mathrm{d}t \text{ converge},$$
et qu'on a dans ce cas :
$$E(V) = \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que :
$$\forall x \geqslant 0, \quad \int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_0^x (1-\Phi(t))\mathrm{d}t - x(1-\Phi(x)).$$

(b) On suppose que V admet une espérance. Montrer que $x\,(1-\Phi(x))$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t$ converge.

(c) On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que V admet une espérance.

(d) Conclure.

On admet que le résultat de la question 3 reste vrai si la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^+$ sauf en un nombre fini de points.

Partie B - Quelques exemples

4. On suppose dans cette question que X admet pour densité la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{\alpha}{1+x^2} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

   (a) Déterminer le réel α.

   (b) Donner la fonction de répartition F de X.

   (c) Déterminer la fonction de répartition F_2 de Y_2 et justifier que Y_2 admet une densité f_2, que l'on calculera.

   (d) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

   (e) En déduire un équivalent de f_2 en $+\infty$.

   (f) En déduire que la loi de X est implosive et donner son indice d'implosion.

5. On suppose dans cette question que X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X=k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

   (a) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$.

   (b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

   (c) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $F(k) = P(X \leqslant k)$.

   (d) Déterminer la loi de Y_2. Admet-elle une espérance ?

   (e) Déterminer la loi de Y_3. Admet-elle une espérance ?

   (f) La loi de X est-elle implosive ? Si oui, quel est son indice d'implosion ?

Partie C - Loi implosive d'indice fixé

On souhaite dans cette partie répondre à la question suivante : « *Existe-t-il, pour tout entier naturel $m \geqslant 2$, une loi qui est implosive et d'indice d'implosion égal à m ?* »

6. Soit $\alpha > 1$.

   (a) Déterminer un réel a tel que la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \dfrac{a}{x^\alpha} & \text{si } x \geqslant 1, \end{cases}$$
   soit une densité de probabilité.

   (b) Dans la suite de cette partie, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

   Déterminer la fonction de répartition F de X.

   (c) Discuter, en fonction de α, l'existence de l'espérance de X.

   (d) Discuter, en fonction de n et de α, l'existence de l'espérance de Y_n.

   (e) Répondre à la question posée.

Partie D - Lois non implosives

On souhaite dans cette partie répondre à la question suivante : « *Existe-t-il des variables aléatoires positives qui n'admettent pas d'espérance et dont la loi n'est pas implosive ?* »

7. (a) Déterminer un réel a tel que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ \dfrac{a}{x\ln^2(x)} & \text{si } x \geqslant 2, \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

(b) Dans la suite de cette partie, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

Déterminer la fonction de répartition F de X.

(c) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

(d) Discuter l'existence de l'espérance de Y_n.

(e) Répondre à la question posée.

Partie E - Variables implosant sur une autre

Soit Y une variable aléatoire positive admettant une espérance. On dit que **la variable aléatoire X implose sur Y** si X est implosive et si, en notant m son indice d'implosion, Y_m est de même loi que Y.

8. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles et soit n un entier supérieur ou égal à 2 tel que Y_n a la même loi que Y. À l'aide de la formule de la question **A.1**, exprimer la fonction de répartition de X en fonction de celle de Y.

9. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. À l'aide de la question précédente, montrer qu'il n'existe aucune variable aléatoire X implosive qui implose sur Y.

10. Soit m un entier tel que $m \geqslant 2$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y admettant une espérance et une variable aléatoire X implosive d'indice d'implosion m qui implose sur Y.
(on pourra s'inspirer des résultats de la partie C).

11. Soit Y une variable aléatoire positive admettant une densité g. On note G sa fonction de répartition.
Soit m un entier tel que $m \geqslant 2$. Montrer que s'il existe une variable aléatoire X implosive, d'indice d'implosion m, qui implose sur Y, alors pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq m$, il existe une variable aléatoire implosive, d'indice d'implosion k, qui implose sur Y.

Partie F - Variables explosives

On pose pour tout entier $n \geqslant 2$, $Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

On dit que **la loi de X est explosive** s'il existe un entier $m \geqslant 2$ tel que Z_m n'admet pas d'espérance. Si la loi de X est explosive, on appelle **indice d'explosion** de X le plus petit entier $m \geqslant 2$ tel que Z_m n'admet pas d'espérance.

12. Pour un entier m donné, existe-t-il des variables aléatoires de loi explosive dont l'indice d'explosion est m ?

13. Existe-t-il des variables aléatoires positives qui ne sont pas explosives ?