DS7

Correction du concours blanc 1 type Edhec

Exercice 1 (Edhec 2014)
Partie 1 : méthode utilisant un produit scalaire

1. (a) L'application $t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est donc généralisée en $+\infty$. On a :
   - $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 t^k e^{-t} = 0$ par croissances comparées, donc $t^k e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$;
   - $\frac{1}{t^2} \geq 0$ pour tout $t > 0$;
   - $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge en tant qu'intégrale de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$ au voisinage de $+\infty$.

   Par théorème de comparaison, on en déduit que $\int_1^{+\infty} t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, et donc $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}}$.

   Remarque. On aurait aussi pu reconnaitre l'intégrale $\Gamma(k+1) = \int_0^{+\infty} t^{(k+1)-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

   (b) Montrons que[1] $\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie, c'est-à-dire qu'elle a un sens pour tout $P, Q \in E$. On vient de voir que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi, pour tout polynôme $R = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} R(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0\right) e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

   converge par linéarité. On en déduit donc que pour tout $P, Q \in E$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge bien. Le crochet $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est donc bien défini.

   Montrons maintenant que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire :
   - Linéarité à gauche : $\forall P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q\rangle &= \int_0^{+\infty} (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} (\lambda_1 P_1(t) + \lambda_2 P_2(t))Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \lambda_1 \int_0^{+\infty} P_1(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t + \lambda_2 \int_0^{+\infty} P_2(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t \\
&\quad \text{par linéarité de l'intégrale (les intégrales convergent !)} \\
&= \lambda_1\langle P_1, Q\rangle + \lambda_2\langle P_2, Q\rangle
\end{aligned}$$

   - Symétrie :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \langle Q, P\rangle$$

     En particulier, on en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à droite.
   - Positivité :

$$\langle P, P\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t}\mathrm{d}t$$

     Or l'intégrale d'une fonction positive est positive. Donc $\langle P, P\rangle \geq 0$.

[1] Ce n'est pas explicitement demandé dans l'énoncé, mais il faut prendre l'initiative de le faire. On vous enlèverait des points dans le cas contraire.

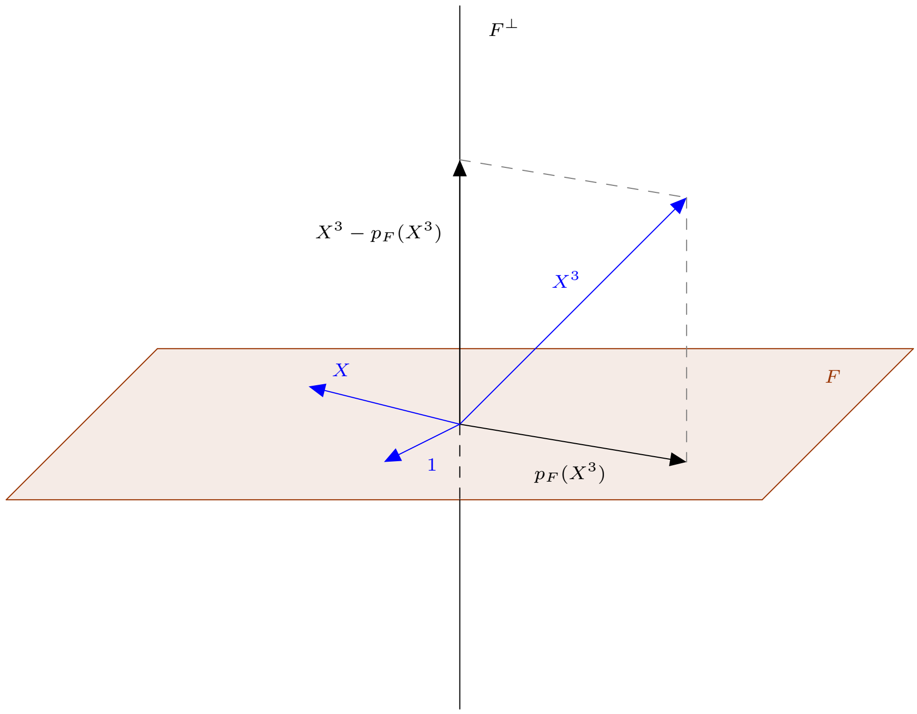
- Défini positif : Soit P tel que $\langle P, P\rangle = 0$. On a :
$$0 = \int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t}\mathrm{d}t$$
Or $t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Son intégrale est donc nulle si et seulement si :
$$\forall t \geq 0, \quad P(t)e^{-t} = 0 \to \forall t \geq 0, \quad P(t) = 0$$
Ainsi P est un polynôme admettant une infinité de racines (tous les réels positifs ou nul). C'est donc le polynôme nul. Donc $P = 0$ et $<, >$ est défini positif.

On peut donc conclure que $\boxed{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire.}}$

2. Soit donc $QxX + y$, où x et y sont deux réels. On a :
$$\left\|X^3 - Q\right\|^2 = \langle X^3 - Q, X^3 - Q\rangle = \int_0^{+\infty} (t^3 - Q(t))^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t \boxed{= \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

3. (a) Le cours assure l'existence et l'unicité d'un polynôme Q_0 de F qui rend $\left\|X^3 - Q\right\|^2$ minimale lorsque Q parcourt le sous-espace F : $\boxed{Q_0 \text{ est le projeté orthogonal de } X^3 \text{ sur } F.}$

(b) D'après la caractérisation du projeté orthogonal, on a :
$$Q_0 \in F \text{ et } X^3 - Q_0 \in F^\perp$$



Comme $F = \mathrm{Vect}(1, X)$, on en déduit donc que $\boxed{\left\langle X^3 - Q_0, 1\right\rangle = 0 \text{ et } \left\langle X^3 - Q_0, X\right\rangle = 0.}$

(c) Notons $Q_0 = x_0X + y_0$ avec $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ (possible car $Q_0 \in F = \mathrm{Vect}(1, X)$. On a d'après la question précédente :
$$\begin{cases} \left\langle X^3 - x_0X - y_0, 1\right\rangle = 0 \\ \left\langle X^3 - x_0X - y_0, X\right\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left\langle X^3, 1\right\rangle = x_0\langle X, 1\rangle + y_0\langle 1, 1\rangle \\ \left\langle X^3, X\right\rangle = x_0\langle X, X\rangle + y_0\langle 1, X\rangle \end{cases}$$
Observons à présent que pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, on a :
$$\langle X^k, X^l\rangle = \int_0^{+\infty} t^{k+l}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(k + l + 1) = (k + l)!$$
On peut donc réécrire le système sous la forme suivante :
$$\begin{cases} 6 = x_0 + y_0 \\ 24 = 2x_0 + y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x_0 = 18 \\ y_0 = -12 \end{cases}}$$

(d) Reste à remplacer dans Δ :

$$\begin{aligned}
\Delta = \|X^3 - 18X + 12\|^2 &= \int_0^{+\infty} (t^3 - 18t + 12)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} (t^6 + 18^2t^2 + 12^2 - 36t^4 + 24t^3 - 18 \times 12 \times 2t)e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \Gamma(7) + 2^2 \times 3^4\Gamma(3) + 12^2\Gamma(1) - 36\Gamma(5) + 24\Gamma(4) - 18 \times 24\Gamma(2) \\
&\qquad \text{par linéarité (tout converge !)} \\
&= 720 + 12 \times (54 + 12 - 3 \times 24 + 2 \times 6 - 36) \\
&= 720 + 12 \times (78 - 108) = 720 - 12 \times 30 = 360.
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{la valeur de } \Delta \text{ est de } 360.}$

Partie 2 : méthode utilisant une fonction de deux variables

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f(x, y) = \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a :

$$(t^3 - xt - y)^2 = t^6 + x^2t^2 + y^2 - 2xt^4 - 2yt^3 + 2xyt.$$

On obtient :

$$f(x, y) = \int_0^{+\infty} t^6 e^{-t}\,\mathrm{d}t + x^2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t + y^2 \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t - 2x \int_0^{+\infty} t^4 e^{-t}\,\mathrm{d}t - 2y \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}\,\mathrm{d}t + 2xy \int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$$

par linéarité de l'intégrale (tout converge ici d'après 1.(a)). On en déduit que :

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \Gamma(7) + x^2\Gamma(3) + y^2\Gamma(1) - 2x\Gamma(5) - 2y\Gamma(4) + 2xy\Gamma(2) \\
&\boxed{= 2x^2 + y^2 + 2xy - 48x - 12y + 720.}
\end{aligned}$$

2. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynômiale, et on a :

$$\nabla f(x, y) = (4x - 48 + 2y, 2y - 12 + 2x).$$

(x, y) est un point critique de f si et seulement si :

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 48 + 2y = 0 \\ 2y - 12 + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 36 & (1)\text{-}(2) \\ -2y = 24 & (1)\text{-}2(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = -12 \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{f \text{ admet un unique point critique sur } \mathbb{R}^2 \text{ qui est } (18, -12)}$. De plus, on a $f(18, -12) = 360$.

3. Montrons que f admet en $(18, -12)$ un minimum global. Pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
f(18 + h, -12 + k) - f(18, -12) &= 2(18 + h)^2 + (-12 + k)^2 + 2(18 + h)(-12 + k) - 48(18 + h) \\
&\quad - 12(-12 + k) + 720 - 360 \\
&= 2 \times 4 \times 9^2 + 72h + 2h^2 + 144 - 24k + k^2 - 2 \times 18 \times 12 + 36k \\
&\quad - 24h + 2hk - 48 \times 18 - 48h + 144 - 12k + 360 \\
&= 2h^2 + k^2 + 2hk + 4 \times 9(18 + 4 - 12 - 24 + 4 + 10) \\
&= h^2 + (k + h)^2 + 4 \times 9(36 - 36) = h^2 + (k + h)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{f \text{ admet un minimum global en } (18, -12) \text{ qui vaut } 360.}$

Exercice 2 (Edhec 2010)

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$F_{-Y}(x) = P(-Y \leq x) = P(Y \geq -x) = 1 - P(Y < -x) \overset{Y \text{ cont.}}{=} 1 - P(Y \leq -x) = 1 - F_Y(-x).$$

Or on a pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$F_Y(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ \dfrac{u}{a} & \text{si } 0 \leq u \leq a \\ 1 & \text{si } u > a \end{cases}.$$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F_Y(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -x < 0 \\ \dfrac{-x}{a} & \text{si } 0 \leq -x \leq a \\ 1 & \text{si } -x > a \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{x}{a} & \text{si } -a \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x < -a \end{cases}.$$

En substituant dans notre calcul, on a que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{-Y}(x) = \begin{cases} 1 - 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 + \frac{x}{a} & \text{si } x \in [-a, 0] \\ 1 - 1 & \text{si } x < -a \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ \frac{x-(-a)}{0-(-a)} & \text{si } x \in [-a, 0] \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

On obtient que $-Y$ suit une loi $\mathscr{U}([-a, 0])$. C'est en particulier une variable à densité, une densité de $-Y$ étant donnée par $\boxed{f_{-Y} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [-a, 0] \\ \frac{1}{a} & \text{si } t \in [-a, 0] \end{cases}.}$

Autre méthode. $Z = -Y$ est une fonction affine d'une variable à densité (de la forme $Z = aY + b$). Par le cours, on sait qu'une telle variable est à densité, et qu'une densité de Z est donnée par la formule :

$$f_Z : t \mapsto \frac{1}{|a|} f_Y\left(\frac{t-b}{a}\right) = f_Y(-t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -t \notin [0, a] \\ 1 & \text{si } -t \in [0, a] \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [-a, 0] \\ \frac{1}{a} & \text{si } t \in [-a, 0] \end{cases}.$$

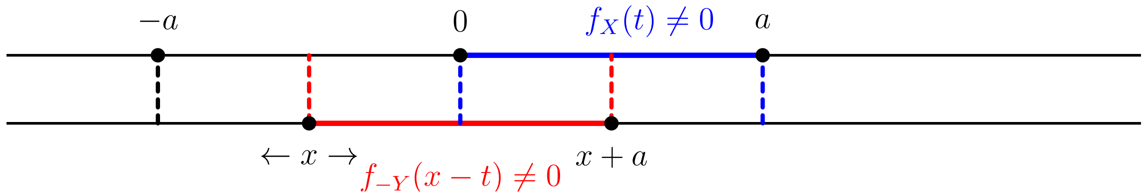
(b) Comme X et Y sont indépendantes, il en est de même de X et $-Y$ par lemme de coalition. De plus la densité de $-Y$ (ou celle de X) est bornée. Par le théorème du cours, $X - Y$ est donc une variable à densité, de densité définie (et continue) sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_{-Y}(x-t)\mathrm{d}t$$

On a :

$$f_{-Y}(x-t) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad -a \leq x - t \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq t \leq x + a.$$

On obtient le diagramme suivant :



On a alors quatre cas à considérer :

- si $x \leq -a$, alors $f_X(t) f_{-Y}(x-t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc $g(x) = 0$.
- si $-a < x \leq 0$, alors $f_X(t) f_{-Y}(x-t) \neq 0$ si et seulement si $t \in [0, x+a[$ (c'est la situation qui est représentée ci-dessus). D'où :

$$g(x) = \int_0^{x+a} f_X(t) f_{-Y}(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^{x+a} \frac{1}{a^2}\mathrm{d}t = \frac{x+a}{a^2}.$$

- si $0 \leq x < a$, alors $f_X(t)f_{-Y}(x-t) \neq 0$ si et seulement si $t \in [x, a[$, et on a :
$$g(x) = \int_x^a f_X(t)f_{-Y}(x-t)\mathrm{d}t = \int_x^a \frac{1}{a^2}\mathrm{d}t = \frac{a-x}{a^2}.$$
- si $x \geq a$, alors $f_X(t)f_{-Y}(x-t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et alors $g(x) = 0$.

Finalement, on obtient que $\boxed{g\colon x \mapsto \begin{cases} \frac{a-|x|}{a^2} & \text{si } \ x \in [-a,a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ est une densité de } X-Y.}$

2. (a) On a $(X-Y)(\Omega) = [-a,a]$ à partir de la densité g. On en déduit que $Z(\Omega) = [0,a]$. En particulier, on a $H(x) = 0$ pour tout $x < 0$ et $H(x) = 1$ pour tout $x > a$. Soit à présent $x \in [0,a]$. On a :
$$\begin{aligned} H(x) &= P(Z \leq x) = P(|X-Y| \leq x) = P(-x \leq X-Y \leq x) \\ &= P(X-Y \leq x) - P(X-Y < -x) = G(x) - G(-x) \end{aligned}$$
car $X-Y$ est une variable à densité. On obtient donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\boxed{H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < 0 \\ G(x) - G(-x) & \text{si } \ 0 \leq x \leq a \\ 1 & \text{si } \ x > a \end{cases}}$$
(b) On admet que Z est une variable aléatoire à densité (ce qu'on aurait d'ailleurs pu démontrer en vérifiant que H est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points 0 et a). On obtient en dérivant que pour tout $x \neq 0, a$:
$$H'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < 0 \\ g(x) + g(-x) & \text{si } \ x \in]0,a[\\ 0 & \text{si } \ x > a \end{cases}.$$
Ainsi une densité de Z est donnée par (en fixant arbitrairement les valeurs en 0 et a) :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < 0 \\ 2\frac{a-|x|}{a^2} & \text{si } \ x \in [0,a] \\ 0 & \text{si } \ x > a \end{cases}$$
Comme $x \in [0,a]$ est positif, on en conclut que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ h(x) = \begin{cases} \frac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } \ x \in [0,a] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Z admet un moment d'ordre k si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k h(t)\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{2t^k(a-t)}{a^2}\mathrm{d}t$ converge absolument. Or c'est l'intégrale d'une fonction continue sur $[0,a]$, donc elle converge bien absolument. Ainsi Z admet un moment à tous les ordres. En particulier, Z admet une espérance et une variance. De plus on a :
$$\begin{aligned} E(Z^k) &= \int_0^a x^k h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{a^2}\int_0^a \left[ax^k - x^{k+1}\right]\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{a^2}\left[\frac{ax^{k+1}}{k+1} - \frac{x^{k+2}}{k+2}\right]_0^a = \frac{2}{a^2}\left[\frac{a^{k+2}}{k+1} - \frac{a^{k+2}}{k+2}\right] = \frac{2a^k}{(k+1)(k+2)} \\ V(Z) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2a^2}{12} - \left(\frac{2a}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{9} \end{aligned}$$
On obtient donc $\boxed{E(Z) = \frac{a}{3}}$ et $\boxed{V(Z) = \frac{a^2}{18}}$.

4.
```
function z=simulation(a)
    x=a*rand();
    y=a*rand();
    z=abs(x-y)
endfunction
```

Exercice 3 (Edhec 2010)

1. Comme u est non nul (puisque de norme 1) alors $\text{Vect}(u)$ est de dimension 1 et alors son supplémentaire orthogonal est de dimension $\dim(E)-1$. Ainsi on a $\boxed{\dim\left((\text{Vect}(u))^\perp\right) = 1.}$

2. Soit $(x,y)\in E^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. On a :
$$\begin{aligned} f_\lambda(\alpha x+\beta y) &= \lambda\langle \alpha x+\beta y, u\rangle u + \alpha x + \beta y = \lambda\alpha\langle x,u\rangle u + \lambda\beta\langle y,u\rangle u + \alpha x + \beta y \\ &= \alpha\left[\lambda\langle x,u\rangle u + x\right] + \beta\left[\lambda\langle y,u\rangle u + y\right] = \alpha f_\lambda(x) + \beta f_\lambda(y) \end{aligned}$$
donc f_λ est linéaire. Comme de plus f_λ va de E dans E, $\boxed{f_\lambda \text{ est bien un endomorphisme de } E.}$

3. Il s'agit de prouver que $g = f_\lambda^2 - (\lambda+2)f_\lambda + (\lambda+1)\text{Id}_E$ est l'endomorphisme nul de E. Soit donc $x\in E$. Comme $1 = \|u\|^2 = \langle u,u\rangle$ on a $f_\lambda(u) = (\lambda+1)u$. On obtient alors :
$$\begin{aligned} g(x) &= f_\lambda(\lambda\langle x,u\rangle u + x) - (\lambda+2)(\lambda\langle x,u\rangle u + x) + (\lambda+1)x \\ &= \lambda\langle x,u\rangle f_\lambda(u) + f_\lambda(x) - \lambda(\lambda+2)\langle x,u\rangle u - (\lambda+2)x + (\lambda+1)x \\ &= \lambda\langle x,u\rangle(\lambda+1)u + \lambda\langle x,u\rangle u + x - \lambda(\lambda+2)\langle x,u\rangle u - (\lambda+2)x + (\lambda+1)x \\ &= \left[\lambda(\lambda+1)+\lambda-\lambda(\lambda+2)\right]\langle x,u\rangle u + \left[1-(\lambda+2)+(\lambda+1)\right]x = 0 \end{aligned}$$
Ainsi $\boxed{P = X^2-(\lambda+2)X+(\lambda+1) \text{ est bien un polynôme annulateur de } f_\lambda.}$

4. (a) On a $\boxed{f_\lambda(u) = (\lambda+1)u}$ (fait en 3.), ce qui se réécrit $u\in E_{\lambda+1}(f_\lambda)$.

   Soit $v\in(\text{Vect}(u))^\perp$. Alors on a :
$$f_\lambda(v) = \lambda\langle v,u\rangle u + v = \lambda\times 0\times u + v \boxed{= v.}$$
   Ainsi on a $v\in E_1(f_\lambda)$. Ceci étant vrai pour tout $v\in(\text{Vect}(u))^\perp$, on notera qu'on a $(\text{Vect}(u))^\perp \subset E_1(f_\lambda)$.

   (b) On obtient avec la question précédente que :
   - $\text{Vect}(u)\subset E_{\lambda+1}$, sous-espace propre de f_λ associé à la valeur propre $\lambda+1$;
   - $(\text{Vect}(u))^\perp\subset E_1$, sous-espace propre de f_λ associé à la propre 1.

   De plus, on a $\lambda+1\neq 1$ car $\lambda\neq 0$. On en déduit que $\dim E_{\lambda+1}\geq \dim(\text{Vect}(u)) = 1$ et $\dim E_1\geq \dim(\text{Vect}(u)^\perp) = n-1$. Ainsi on a :
$$n = 1+(n-1)\leq \dim E_{\lambda+1} + \dim E_1 \underbrace{\leq}_{\text{cours}} n.$$
   Donc $\dim E_{\lambda+1} + \dim E_1 = n$, et on a $\boxed{\text{Sp}(f) = \{\lambda+1, 1\}}$ et $\dim E_{\lambda+1} = 1$, $\dim E_1 = n-1$. Comme on avait déjà $\text{Vect}(u)\subset E_{\lambda+1}$ et que ces espaces sont de même dimension, on obtient $\boxed{\dim E_{\lambda+1} = \text{Vect}(u)}$. De même, on a $\boxed{\dim E_1 = \text{Vect}(u)^\perp}$.

   Remarque. On peut même en déduire que f_λ est diagonalisable (non demandé mais conséquence directe de ce qu'on a obtenu).

5. (a) D'après la question 3., X^2-X est un polynôme annulateur de f_{-1}. Ainsi $\boxed{f_{-1}^2 = f_{-1}, \text{ et } f_{-1} \text{ est donc un projecteur.}}$

   (b) On sait alors que : $\text{Ker}(f_{-1}) = E_0(f_{-1}) = \text{Vect}(u)$ et $\text{Im}(f_{-1}) \underbrace{=}_{f_{-1}\text{ projecteur}} E_1(f) = (\text{Vect}(u))^\perp$. En particulier on a $\text{Ker}(f_{-1})\perp\text{Im}(f_{-1})$, et $\boxed{f_{-1} \text{ est donc le projecteur orthogonal sur } (\text{Vect}(u))^\perp.}$

Problème (Ecricome 2006).

I. Étude des longueurs de séries

1. L'évènement $(L_1 = n)$ est réalisé si et seulement si on fait n Piles suivi d'un Face ou si on fait n Faces suivi d'un Pile. On a ainsi l'égalité d'évènements :

$$\boxed{(L_1 = n) = (P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}) \bigcup (F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1})\,.}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} P(L_1 = n) &= P\Big((P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}) \bigcup (F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1})\Big) \\ &= P(P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}) + P(F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1}) \quad \text{par incomp. des évènements} \\ &= P(P_1)\dots P(P_n)P(F_{n+1}) + P(F_1)\dots P(F_n)P(P_{n+1}) \quad \text{par indép. des lancers} \\ &\boxed{= p^n q + q^n p} \end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geq 1} P(L_1 = n)$ converge par σ-additivité d'une probabilité (les évènements sont incompatibles), et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^n q + q^n p$$

On reconnait ici les termes généraux de deux séries géométriques de raisons p et q toutes deux dans $]-1, 1[$. Elles convergent donc. On obtient par linéarité de la somme (tout converge) que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^n q + \sum_{n=1}^{+\infty} q^n p = q\frac{p}{1-p} + p\frac{q}{1-q} = p + q \boxed{= 1}$$

Remarque. On vient ainsi de montrer que la famille d'évènements $((L_1 = n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système presque complet d'évènements.

2. On note L_2 la longueur de la deuxième série.

   (a) L'évènement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$ est réalisé si et seulement si les n premiers lancers donnent Pile, les k suivant donnent Face, et le $n + k + 1$ donne pile ou l'inverse (n Faces, puis k Piles, puis un Pile). Ce qui donne :

$$\boxed{(L_1 = n) \cap (L_2 = k) = (P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1} \cap \cdots \cap F_{n+k} \cap P_{n+k+1}) \bigcup (F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap \cdots \cap P_{n+k} \cap F_{n+k+1})}$$

   En utilisant encore une fois l'incompatibilité des évènements, puis l'indépendance des lancers, on obtient :

$$\begin{aligned} P((L_1 = n) \cap (L_2 = k)) &= P(P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1} \cap \cdots \cap F_{n+k} \cap P_{n+k+1}) \\ &\quad + P(F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap \cdots \cap P_{n+k} \cap F_{n+k+1}) \\ &= p^n q^k p + q^n p^k q \boxed{= p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k.} \end{aligned}$$

   (b) Par la formule des probabilités totales appliquée avec le SPCE $((L_1 = n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, on obtient que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(L_2 = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((L_1 = n) \cap (L_2 = k)) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k$$

   On reconnait là encore deux séries géométriques de raisons appartenant à $]-1, 1[$. Tout converge donc et on peut appliquer la linéarité de la somme. On obtient (sans oublier le premier terme dans les sommes des séries géométriques) :

$$P(L_2 = k) = q^k \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n+1} + p^k \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n+1} = q^k \frac{p^2}{1-p} + p^k \frac{q^2}{1-q} \boxed{= p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}.}$$

(c) La variable aléatoire L_2 admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geq 1} kP(L_2 = k)$ converge absolument, donc converge car elle est à termes positifs. On a pour tout $k \geq 1$:

$$kP(L_2 = k) = p^2kq^{k-1} + q^2kp^{k-1}.$$

On reconnait ici les termes généraux de deux séries géométriques dérivées, qui convergent car leur raison appartient à $]-1,1[$. Par linéarité de la somme, on peut donc conclure que $E(L_2)$ existe et vaut :

$$\begin{aligned} E(L_2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP(L_2 = k) = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} + q^2 \sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} \\ &= p^2 \frac{1}{(1-q)^2} + q^2 \frac{1}{(1-p)^2} \boxed{= 2.} \end{aligned}$$

II. Étude du nombre de séries lors des n premiers lancers

3. En un lancer, il n'est possible d'obtenir qu'une seule série, donc $\boxed{N_1 \text{ est la variable certaine égale à } 1}$, et $\boxed{E(N_1) \text{ existe et vaut } 1.}$

   En deux lancers, il est possible d'obtenir une série (en faisant deux Piles consécutifs ou deux Faces consécutifs), ou deux séries (en faisant Pile puis Face, ou l'inverse). On en déduit que $\boxed{N_2(\Omega) = \{1, 2\}}$ avec :

$$P(N_2 = 1) = P(P_1 \cap P_2) + P(F_1 \cap F_2) \boxed{= p^2 + q^2 = \frac{1}{2}},$$

$$P(N_2 = 2) = P(P_1 \cap F_2) + P(F_1 \cap P_2) \boxed{= 2pq = \frac{1}{2}}.$$

   N_2 étant finie, elle admet une espérance qui vaut :

$$E(N_2) = 1 \times P(N_2 = 1) + 2 \times P(N_2 = 2) \boxed{= p^2 + q^2 + 4pq.}$$

   De même, on obtient que $\boxed{N_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}}$ et on a :

$$P(N_3 = 1) = P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) \boxed{= p^3 + q^3 = \frac{1}{4}},$$

$$P(N_3 = 2) = P(P_1 \cap F_1 \cap F_2) + P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(P_1 \cap P_2 \cap F_3) + P(F_1 \cap F_2 \cap P_3) \boxed{= 2(pq^2 + p^2q) = \frac{1}{2}},$$

$$P(N_3 = 3) = P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) + P(F_1 \cap P_2 \cap F_3) \boxed{= p^2q + pq^2 = \frac{1}{4}}.$$

   N_3 étant finie, elle admet une espérance, et on a :

$$E(N_3) = 1 \times P(N_3 = 1) + 2 \times P(N_3 = 2) + 3 \times P(N_3 = 3) \boxed{= p^3 + q^3 + 7(pq^2 + p^2q) = 2.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sur les n lancers, on a au minimum une série (en faisant que des Piles ou que des Faces) et au maximum n séries (en alternant les Piles et les Faces). Donc on a $N_n(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$. De plus toutes ces valeurs sont bien atteintes car pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'évènement $(N_n = k)$ se réalise par exemple en alternant k Piles et Faces sur les k premiers lancers et en prenant les $n - k$ derniers lancers identiques au k-ème. Ainsi on a que $\boxed{N_n(\Omega) = [\![1, n]\!]}$.

   L'évènement $(N_n = 1)$ est réalisé si et seulement si on obtient n Piles ou n Faces. En utilisant l'incompatibilité des évènements et l'indépendance des lancers (comme dans la partie I), on obtient que :

$$\boxed{P(N_n = 1) = p^n + q^n = \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

   L'évènement $(N_n = n)$ est réalisé si et seulement si on alterne Pile et Face sur nos n lancers. Cela dépend alors de la parité de n car il y aura potentiellement 1 Pile de plus qu'un Face, ou l'inverse, si n impair. Plus précisément :

- Si $n = 2k$ est pair, alors on a :

$$\begin{aligned} P(N_n = 2k) &= P(P_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap P_{2k-1} \cap F_{2k}) + P(F_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap F_{2k-1} \cap P_{2k}) \\ &= p^k q^k + q^k p^k \boxed{= 2(pq)^k = \frac{1}{2^{2k-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}} \end{aligned}$$

- Si $n = 2k+1$ est pair, alors on a :

$$\begin{aligned} P(N_n = 2k+1) &= P(P_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap P_{2k-1} \cap F_{2k} \cap P_{2k+1}) + P(F_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap F_{2k-1} \cap P_{2k} \cap F_{2k+1}) \\ &= p^{k+1} q^k + q^{k+1} p^k \boxed{= (pq)^k (p+q) = \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{2^{n-1}}} \end{aligned}$$

Remarque. On pouvait procéder différemment pour les deux questions précédentes. Comme la pièce est équilibrée dans cette section, les tirages sont tous équiprobables. Ainsi pour calculer la probabilité $P(N_n = n)$ par exemple, on dénombre le nombre de tirages favorables (deux, en alternant les Piles et Faces, selon que l'on commence par un Pile ou un Face) et le nombre de tirages possibles (2^n, puisque deux possibilités pour chacun des n tirages). On obtient ainsi :

$$P(N_n = n) = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Il n'était pas indispensable de distinguer les cas n pair et n impair, les probabilités de faire Pile ou Face étant dans tous les cas de $\frac{1}{2}$.

5. On utilise le programme suivant.

```
function N = simulation(m)
   X = zeros(m,1) ;
   N = zeros(m,1) ;
   X(1) = floor(2*rand()) ;
   N(1) = 1 ;
   for i = 2 : m
      X(i) = floor(2*rand())
      if X(i) <>X(i-1) then
         N(i) = N(i-1)+1 ; // Une nouvelle série se crée au i-ème lancer
      else
         N(i) = N(i-1) ; // Pas de nouvelle série au i-ème lancer
      end
   end
endfunction
```

Notons que `2*rand()` permet de tirer un nombre au hasard dans $[0, 2]$, et donc que `floor(2*rand())` retourne 0 ou 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$ pour chacun. On simule bien ici une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

On peut alors faire appel 10 000 fois à cette fonction pour simuler 10 000 réalisations de N_{20} et calculer la moyenne de ces 10 000 simulations, qui doit être une valeur approchée de $E(N_{20})$ par la loi faible des grands nombres.

```
s = 0
for i = 1:10000
      N = simulation(20)
      s = s + N(20)
end
disp(s/10000)
```

Remarque. Il y avait une erreur d'énoncé ici, c'était moins intéressant de chercher une valeur approchée de $E(X_{20})$ qu'on connait déjà car X_{20} suit une loi de Bernoulli.

6. (a) Comme $N_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$, s^{N_n} existe bien pour tout $s \in [0,1]$. C'est de plus une variable aléatoire finie, qui admet donc une espérance. Par le théorème de transfert, on a :

$$E(s^{N_n}) = \sum_{k=1}^{n} s^k P(N_n = k) \boxed{= G_n(s).}$$

(b) G_n est une fonction polynomiale donc dérivable, et on a :

$$G_n'(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) k s^{k-1}.$$

D'où avec $s = 1$, on obtient :

$$G_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} k P(N_n = k) \boxed{= E(N_n).}$$

(c) Soit $n \geq 2$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$. La famille d'évènements (P_{n-1}, F_{n-1}) est un système complet d'évènements. Par la formule des probabilités totales, on a :

$$P((N_n = k) \cap P_n) = P((N_n = k) \cap P_n \cap P_{n-1}) + P((N_n = k) \cap P_n \cap F_{n-1}).$$

Or on a $(N_n = k) \cap P_n \cap P_{n-1} = (N_{n-1} = k) \cap P_n \cap P_{n-1}$ car si $P_n \cap P_{n-1}$ est réalisé, on ne démarre pas une nouvelle série au n-ème lancer et donc $N_n = N_{n-1}$. De même, on a $(N_n = k) \cap P_n \cap F_{n-1} = (N_n = k-1) \cap P_n \cap F_{n-1}$ car si $P_n \cap F_{n-1}$ est réalisé, on démarre une nouvelle série au n-ème lancer, et $N_n = N_{n-1} + 1$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} P((N_n = k) \cap P_n) &= P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n) + P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n) \\ &= P(P_n)P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + P(P_n)P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}) \end{aligned}$$

par indépendance des évènements $(N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}$ et $(N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}$ qui ne font intervenir que les $(n-1)$ premiers lancers, avec l'évènement P_n. On obtient donc bien la relation :

$$\boxed{P((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}).}$$

On admet que :

$$P((N_n = k) \cap F_n) = \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}).$$

Par la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (P_n, F_n), on obtient :

$$\begin{aligned} P(N_n = k) &= P((N_n = k) \cap P_n) + P((N_n = k) \cap F_n) \\ &= \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}) \\ &\quad + \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2}\left(P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + P((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1})\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(P((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}) + P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1})\right) \\ &\boxed{= \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k-1)} \end{aligned}$$

par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements (P_{n-1}, F_{n-1}).

(d) Soit $n \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1+s}{2}G_{n-1}(s) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1}=k)s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1}=k)s^{k+1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1}=k)s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} P(N_{n-1}=k-1)s^k \\
&= \frac{1}{2}P(N_{n-1}=1)s + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1}\left(P(N_{n-1}=k)+P(N_{n-1}=k-1)\right)s^k \\
&\quad + \frac{1}{2}P(N_{n-1}=n-1)s^n \\
&= \underbrace{\frac{1}{2^n s}}_{P(N_n=1)s} + \sum_{k=2}^{n-1} P(N_n=k)s^k + \underbrace{\frac{1}{2^n}s^n}_{P(N_n=n)s^n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(N_n=k)s^k
\end{aligned}$$

Ainsi on a bien :

$$\boxed{G_n(s) = \frac{1+s}{2}G_{n-1}(s).}$$

D'autre part, on a $G_1(s) = P(N_1=1)s = s$. À $s \in [0,1]$ fixé, la suite $(G_n(s))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\dfrac{1+s}{2}$. On en déduit que :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} G_1(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s.}$$

(e) Pour $n \geq 2$, le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers est donné par $E(N_n) = G_n'(1)$ d'après 6.(b). On a :

$$G_n'(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} + (n-1)\frac{1}{2}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} s.$$

On en déduit que :

$$E(N_n) = G_n'(1) = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Notons que pour $n=1$, on a $E(N_1)=1$. La formule ainsi obtenue est encore valable pour $n=1$. On peut donc conclure que pour tout $n \geq 1$, le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers est $\boxed{\dfrac{n+1}{2}}$.

III. Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

7. La fonction $f : x \mapsto e^{-x}$ est de classe $\mathscr{C}^2$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = e^{-x} \geq 0$. Donc f est convexe. De plus on a $f(0)=1$ et $f'(0)=-1$, donc la tangente en $x=0$ à $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(0)+(x-0)f'(0) = 1-x$.

   Puisque f est convexe, sa courbe est située au dessus de toutes ses tangentes. En particulier, on a pour tout réel x :

   $$\boxed{1-x \leq e^{-x}.}$$

   Remarque. Une autre méthode consiste à étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto e^{-x}+x-1$, et ainsi à montrer que g est positive sur $\mathbb{R}$.

8. (a) La série $\sum_{i\geq k} P(A_i)$ est de terme général positif, donc sa suite des sommes partielles est croissante. Par le théorème de la limite monotone, soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$. Comme la série diverge par hypothèse, on en déduit que :

   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty.}$$

(b) On a $\overline{C_n} = \overline{\bigcup_{i=k}^{n} A_i} = \bigcap_{i=k}^{n} \overline{A_i}$. On en déduit que :

$$P(C_n) = 1 - P(\overline{C_n}) \underset{\text{indép.}}{=} \boxed{1 - \prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i}).}$$

D'autre part, on a avec la question 7., que :

$$\forall k \leq i \leq n, \quad 0 \leq P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) \leq \exp(-P(A_i)).$$

Par produit de ces inégalités, on obtient :

$$\prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i}) \leq \exp(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)).$$

On obtient donc que pour tout $n \geq k$:

$$\boxed{P(C_n) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right).}$$

On a de plus que $P(C_n) \leq 1$ pour tout $n \geq k$, et que $\lim_{n \to +\infty} 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right) = 1$. Par théorème des gendarmes, on en déduit que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(C_n) = 1.}$

(c) On a $\boxed{C_n \subset C_{n+1}}$ pour tout $n \geq k$. Par théorème de la limite monotone, on en déduit que :

$$P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right) = \lim_{n \to +\infty} P(C_n) \boxed{= 1.}$$

(d) Pour tout $i \geq k$, on a :

$$A_i \subset C_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n.$$

Donc on a $\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$. Réciproquement, on a pour tout $n \geq k$:

$$C_n = \bigcup_{i=k}^{n} A_i \subset \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i.$$

Ainsi on a $\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n \subset \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$. On en déduit que :

$$\boxed{\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n.}$$

D'où finalement $P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n\right) \boxed{= 1.}$

9. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. Notons D_ℓ l'évènement « avoir deux Pile consécutifs après le ℓ-ème lancer ». Posons $k = \begin{cases} \ell & \text{si } \ell \text{ pair} \\ \ell + 1 & \text{si } \ell \text{ impair} \end{cases}$. On a :

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \subset D_\ell$$

car $\displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$ est l'évènement « obtenir Pile à un lancer d'ordre pair ainsi qu'au lancer suivant après le ℓ-ème lancer » qui est bien inclus dans l'évènement « avoir deux Pile consécutifs après le ℓ-ème lancer ». On en déduit que :

$$P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) \leq P(D_\ell) \leq 1.$$

Or on a $P(A_i) = P(P_{2i} \cap P_{2i+1}) = p^2$, et donc la série $\displaystyle\sum_{i \geq k} P(A_i)$ diverge (grossièrement). Par les questions précédentes, on en déduit que $P\left(\displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1$. On peut donc conclure que :

$$\boxed{P(D_\ell) = 1.}$$

Il est donc quasi-certain d'obtenir deux Pile consécutifs après n'importe quel lancer.