DS7

Concours blanc 1 type Edhec du 21/01/2020

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

Le but de cet exercice est de prouver l'existence et de donner la valeur (par deux méthodes différentes) de

$$\Delta = \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Partie 1 : méthode utilisant un produit scalaire

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à cœfficients réels, de degré inférieur ou égal à 3 et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les deux polynômes 1 et X.

1. (a) Rappeler pourquoi, pour tout entier naturel k, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

   (b) Montrer que l'application qui, à tout couple (P, Q) d'éléments de E, associe

   $$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

   est un produit scalaire sur E, dont la norme associée sera notée $\|\ \|$.

2. Soit Q un polynôme de F défini par $Q = xX + y$, où x et y sont deux réels.
   Donner, sous forme d'intégrale, l'expression de $\left\|X^3 - Q\right\|^2$.

3. (a) Énoncer le théorème qui assure l'existence et l'unicité du polynôme Q_0 de F qui rend $\left\|X^3 - Q\right\|^2$ minimale.

   (b) En déduire sans calcul les valeurs de $\left\langle X^3 - Q_0, 1\right\rangle$ et $\left\langle X^3 - Q_0, X\right\rangle$.

   (c) En notant $Q_0 = x_0X + y_0$, écrire le système que doit vérifier le couple (x_0, y_0) pour que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t$ soit minimale.

   (d) Déterminer la valeur de Δ.

Partie 2 : méthode utilisant une fonction de deux variables

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(x, y) = \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a :

   $$f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2xy - 48x - 12y + 720.$$

2. Déterminer le seul point critique (x_0, y_0) de f sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

3. Montrer que f admet en (x_0, y_0) un minimum global qui vaut 360.

Exercice 2

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.
On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0, a[$.
On pose $Z = |X - Y|$ et on admet que $-Y$, $X - Y$ et Z sont des variables aléatoires à densité, elles aussi définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. (a) Déterminer une densité de $-Y$.
   (b) En déduire que la variable aléatoire $X - Y$ admet pour densité la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{a-|x|}{a^2} & \text{si } \; x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   On note G la fonction de répartition de $X - Y$.

2. (a) Exprimer la fonction de répartition H de la variable Z en fonction de G.
   (b) En déduire qu'une densité de Z est la fonction h définie par $h(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } \; x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3. Montrer que Z possède une espérance et une variance et les déterminer.

4. Écrire une fonction `Scilab` simulant la variable Z.

Exercice 3
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. On considère un vecteur u de E dont la norme est égale à 1, un réel λ non nul et on note f_λ l'application qui, à tout vecteur x de E, associe $f_\lambda(x) = \lambda\langle x, u\rangle u + x$.

1. Donner la dimension de $(\text{Vect}(u))^\perp$.

2. Montrer que f_λ est un endomorphisme de E.

3. Montrer que le polynôme $X^2 - (\lambda+2)X + (\lambda+1)$ est un polynôme annulateur de f_λ.

4. (a) Déterminer $f_\lambda(u)$ et $f_\lambda(v)$ pour tout vecteur v de $(\text{Vect}(u))^\perp$.
   (b) Établir alors que f_λ possède deux valeurs propres distinctes et donner les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres.

5. Dans cette question, on suppose que $\lambda = -1$.
   (a) Vérifier que f_{-1} est un projecteur.
   (b) Montrer plus précisément que f_{-1} est le projecteur orthogonal sur $(\text{Vect}(u))^\perp$.

Problème.
On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On va s'intéresser dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté.

On dit que la première série est de longueur $n \geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ème l'autre côté.

De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté.

On définit de même les séries suivantes.

Ω désigne l'ensemble des successions infinies de Pile ou Face.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement « le i-ème lancer amène Pile » et F_i l'événement contraire.

Les trois parties sont indépendantes.

I. Étude des longueurs de séries

1. On note L_1 la longueur de la première série.

   Exprimer l'événement $(L_1 = n)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n + 1$. En déduire que :

$$P(L_1 = n) = p^n q + q^n p.$$

   Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = 1$.

2. On note L_2 la longueur de la deuxième série.

   (a) Exprimer l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n + k + 1$ puis calculer la probabilité de l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$.

   (b) En déduire que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}.$$
   On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_2 = k) = 1$.

   (c) Montrer que la variable aléatoire L_2 admet une espérance égale à 2.

II. Étude du nombre de séries lors des n premiers lancers

On considère dans toute cette partie que la pièce est **équilibrée, c'est-à-dire que** $p = \frac{1}{2}$.
On note N_n le nombre de séries **lors des n premiers lancers** :

- La première série est donc de longueur $k < n$ si les k premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(k+1)$-ème l'autre côté et de longueur n si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce.
- La dernière série se termine nécessairement au n-ème lancer.

Par exemple, si les lancers successifs donnent : *FFPPPPFFPPP...* (F désignant Face et P Pile), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega$:

$$N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1,\ N_3(\omega) = \cdots = N_6(\omega) = 2,\ N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3,\ N_9(\omega) = \cdots = N_{11}(\omega) = 4,$$

les données précédentes ne permettant évidemment pas de déterminer $N_{12}(\omega)$.
On admettra que N_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

3. Déterminer les lois de N_1, N_2 et N_3 et donner leurs espérances.

4. Dans le cas général où $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $N_n(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par N_n) puis calculer les valeurs de $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.

5. *Simulation informatique.*

   Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque le k-ème lancer amène Pile et 0 sinon.

   Compléter le programme informatique suivant pour que, m étant une valeur entière, inférieure à 100, entrée par l'utilisateur, il simule les m variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_m$ (dont les valeurs seront placées dans la matrice X) et détermine les valeurs de $N_1, N_2, \ldots, N_m$ (qui seront stockées dans la matrice N).

```
function N = simulation(m)
   X = zeros(m,1) ;
   N = zeros(m,1) ;
   X(1) = floor(2*rand()) ;
   N(1) = 1 ;
   for i = 2 : m
      X(i) = ...
      ....
      ....
   end
endfunction
```

   Proposer alors un programme qui, sur la base de 10000 simulations de X_{20}, retourne une valeur approchée de $E(X_{20})$.

6. **Fonction génératrice de N_n.**

   On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $s \in [0, 1]$:
   $$G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) s^k.$$

(a) Pour $s \in [0,1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.

(b) Que représente $G'_n(1)$?

(c) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$P((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}).$$

On admet que l'on obtiendrait de même :

$$P((N_n = k) \cap F_n) = \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}).$$

Montrer alors que :

$$P(N_n = k) = \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k-1).$$

(d) Soit $n \geq 2$. Montrer que :

$$G_n(s) = \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s).$$

Calculer $G_1(s)$ et en déduire que :

$$G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-1} s.$$

(e) Déterminer le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers.

III. Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

7. Montrer que pour tout réel x, on a $1 - x \leq e^{-x}$.

8. On considère dans cette question une suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'événements indépendants. On suppose que la série de terme général $P(A_i)$ diverge.

   Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $n \geq k$, on note :

$$C_n = \bigcup_{k \leq i \leq n} A_i = A_k \cup \dots \cup A_n.$$

(a) Justifier que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty$.

(b) Montrer que $P(C_n) = 1 - \displaystyle\prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i})$, puis, en utilisant la question 7., que :

$$P(C_n) \geq 1 - \exp\left(- \sum_{i=k}^{n} P(A_i) \right).$$

En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(C_n) = 1$.

(c) Comparer pour l'inclusion les événements C_n et C_{n+1}. Que peut-on en déduire pour $P\left(\displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i \right)$?

(d) Justifier que :

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$$

et en déduire que $P\left(\displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \right) = 1$.

9. En considérant les évènements A_n « on obtient Pile au $(2n)$-ème et au $(2n+1)$-ème lancers », montrer que la probabilité d'avoir deux Pile consécutifs après n'importe quel lancer vaut 1.