DS8

Correction du concours blanc 2 type EM Lyon

Problème 1 (EM Lyon 2016)
Partie I : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série

1. Soit $x < 0$. On a

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)}{n^x}\right| = \begin{cases} 1 \text{ si } x=0 \\ +\infty \text{ si } x<0 \end{cases}$$

Donc le terme général de la série $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge. Or une condition **nécessaire** de convergence de la série est la convergence du terme général vers 0. On en déduit que si $x < 0$, la série $\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x} \text{ diverge}}$ grossièrement.

2. (a) On a :
   - $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2(p+1)} - u_{2p} = -\dfrac{1}{(2p+2)^x} + \dfrac{1}{(2p+1)^x} \geq 0$ car $(2p+1)^x \leq (2p+2)^x$. Donc la suite (u_{2p}) est croissante.
   - $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2(p+1)-1} - u_{2p-1} = \dfrac{1}{(2p+1)^x} - \dfrac{1}{(2p)^x} \leq 0$ car $(2p)^x \leq (2p+1)^x$. Donc la suite (u_{2p-1}) est décroissante.
   - $u_{2p} - u_{2p-1} = \dfrac{-1}{(2p)^x} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc la différence de ces deux suites tend vers 0.

   On peut donc conclure que les suites $\boxed{(u_{2p}) \text{ et } (u_{2p+1}) \text{ sont adjacentes}}$. Par le théorème des suites adjacentes, $\boxed{\text{elles convergent convergent vers une même limite}}$, notée $S(x)$.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{p\to+\infty} u_{2p} = S(x)$ et $\lim_{p\to+\infty} u_{2p-1} = S(x)$, on a :

$$\exists p_1 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \geq p_1, |u_{2p} - S(x)| \leq \varepsilon$$

   et

$$\exists p_2 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \geq p_2, |u_{2p-1} - S(x)| \leq \varepsilon.$$

   Prenons $n_0 = max(2p_1, 2p_2 - 1)$. Pour tout $n \geq n_0$, on a :
   - si n est pair, n s'écrit $n = 2p$ avec $p \geq p_1$ donc $|u_n - S(x)| \leq \varepsilon$;
   - si n est impair, n s'écrit $n = 2p-1$ avec $p \geq p_2$ donc $|u_n - S(x)| \leq \varepsilon$.

   On a donc montré que :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geq n_0, \quad |u_n - S(x)| \leq \varepsilon.}$$

   (c) Par définition, on a donc montré que la suite u converge vers $S(x)$. Et comme u est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$, $\boxed{\text{cette série converge}}$ donc.

   (d) Comme la suite (u_{2p}) est croissante et de limite $S(x)$, on a $u_{2p} \leq S(x)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

   Comme (u_{2p-1}) est décroissante et de limite $S(x)$, on a $S(x) \leq u_{2p+1} \leq u_{2p-1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

   On obtient donc que :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2p} \leq S(x) \leq u_{2p+1} \leq u_{2p-1}.}$$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si n est pair, écrivons $n = 2p$. Par la question précédente, on a $u_n \leq S(x) \leq u_{n+1}$, et donc :
$$0 \leq S(x) - u_n \leq u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^x}$$
On a donc bien $|S(x) - u_n| \leq \dfrac{1}{(n+1)^x}$.
- Si n est impair, écrivons $n = 2p-1$. Toujours par la question précédente, on a $u_{n+1} \leq S(x) \leq u_n$, et donc :
$$0 \geq S(x) - u_n \geq u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{(n+1)^x}.$$
En passant à la valeur absolue, on obtient $|S(x) - u_n| \leq \dfrac{1}{(n+1)^x}$.

Dans tous les cas, on a bien $\boxed{|S(x) - u_n| \leq \dfrac{1}{(n+1)^x}}$.

(f) On fait une boucle `while` pour déterminer le rang n pour lequel $\dfrac{1}{(n+1)^x} \leq \varepsilon$. Pour un tel rang, on aura bien $|S(x) - u_n| \leq \dfrac{1}{(n+1)^x} \leq \varepsilon$, de sorte que u_n est une valeur approchée de $S(x)$ à ε près.

```
function s = serie(x,eps)
n=1
s=1
while (1/(n+1)^x)>eps then
    n=n+1
    s=s+(-1)^(n+1)/(n^x)
end
endfunction
```

3. Pour $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2p \\ k \text{ impair}}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2p \\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \frac{(-1)^{(2i-1)+1}}{(2i-1)^x} + \sum_{i=1}^{p} \frac{(-1)^{2i+1}}{(2i)^x} \boxed{= \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(2i-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{i^x}}.\end{aligned}$$
On en déduit que :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} &= \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(2i-1)^x} + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(2i)^x} - \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(2i)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{i^x} \\ &= \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq 2p \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k^x} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2p \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k^x} \right) - \frac{2}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x} \\ &\boxed{= \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}}\end{aligned}$$

4. (a) La seconde relation de 3. donne avec $x = 1$:

$$v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

D'où en faisant le changement d'indice $i = k - n$:

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} \boxed{= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(i/n)}.}$$

(b) On reconnaît dans cette dernière expression la somme de Riemann d'ordre n de la fonction continue $f : x \in [0,1] \mapsto \dfrac{1}{1+x} \in \mathbb{R}$. Par continuité de f, le théorème des sommes de Riemann assure que v converge et que :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = [\ln(1+x)]_0^1 \boxed{= \ln(2).}$$

Sachant que $(v_n) = (u_{2n})$ converge vers $S(1)$ d'après la question 2.(a), on en déduit par unicité de la limite que $\boxed{S(1) = \ln(2)}$.

5. La formule de la question 3. avec $x = 2$ donne :

$$u_{2p} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2}.$$

En passant à la limite lorsque p tend vers $+\infty$, on en déduit (tout converge) :

$$\lim_{p \to +\infty} u_{2p} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

De même, sachant que (u_{2n}) converge vers $S(2)$ d'après la question 2.(a), on en déduit par unicité de la limite que $\boxed{S(2) = \dfrac{\pi^2}{12}}$.

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t^x}{1+e^t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc l'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$.

En $+\infty$, on a :

- $\frac{t^{x+2}}{1+e^t} \underset{t \to +\infty}{\sim} t^{x+2}e^{-t}$ et $t^{x+2}e^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée. Donc on a $t^{x+2}e^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$,
- $\dfrac{1}{t^2} \geq 0$ pour tout $t > 0$,
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = 2 > 1$).

Par théorème de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t}\mathrm{d}t$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En 0, on a :

- $\frac{t^x}{1+e^t} \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{t^x}{2}$

- $\dfrac{1}{t^{-x}} \geq 0$ pour tout $t > 0$.
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{-x}}$ converge si et seulement si $-x < 1$ (intégrale de Riemann en 0).

Par théorème de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+e^t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > -1$.

Pour conclure, l'intégrale $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t}\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } x > -1.}$

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t > 0$, on a $-e^{-t} \neq 1$ et donc :

$$\begin{aligned}
(-1)^n g_x(t)e^{-nt} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} t^x e^{-kt} &= (-1)^n g_x(t)e^{-nt} - t^x \sum_{k=1}^n (-e^{-t})^k \\
&= (-1)^n g_x(t)e^{-nt} + t^x e^{-t}\frac{1-(-e^{-t})^n}{1-(-e^{-t})} \\
&= (-1)^n g_x(t)e^{-nt} + t^x \frac{1-(-e^{-t})^n}{1+e^t} \\
&= (-1)^n g_x(t)e^{-nt} + g_x(t)(1-(-e^{-t})^n) \boxed{= g_x(t)}
\end{aligned}$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variable $u = kt$ qui est affine donc licite dans l'intégrale généralisée. Par le théorème de changement de variables dans les intégrales généralisées, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt}\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (u/k)^x e^{-k(u/k)}\frac{\mathrm{d}u}{k} = \frac{1}{k^{x+1}}\Gamma(x+1)$. Cette intégrale étant convergente, on en déduit que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt}\mathrm{d}t \text{ est convergente}}$, et on a :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt}\mathrm{d}t = \frac{1}{k^{x+1}}\Gamma(x+1).}$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > -1$, on a :

- $0 \leq g_x(t)e^{-nt} = \dfrac{t^x e^{-nt}}{1+e^t} \leq t^x e^{-nt}$ car $1 + e^t \geq 1$,
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-nt}\mathrm{d}t$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par la question précédente.

Par théorème de comparaison, on en déduit que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}\mathrm{d}t \text{ converge pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$.

De plus, par croissance de l'intégrale, on obtient que :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} t^x e^{-nt}\mathrm{d}t \overset{(b)}{=} \frac{1}{n^{x+1}}\Gamma(x+1).$$

Puisque $x+1 > 0$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{x+1}} = 0$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}\mathrm{d}t \text{ existe et est égale à } 0.}$

(d) On intègre l'égalité de la question 7.(a) sur $]0, +\infty[$ (toutes les intégrales intervenant convergent bien d'après ce qu'on vient de faire). On obtient en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} g_x(t)\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_0^{+\infty} t^x e^{-kt}\mathrm{d}t$$

D'où en utilisant les notations et résultats des questions précédentes :

$$I(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} g_x(t) e^{-nt} \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^{x+1}} \Gamma(x+1)$$

Or on sait que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} g_x(t) e^{-nt} \mathrm{d}t = 0$, et on a établit la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{x+1}}$ pour tout $x > -1$ dans la partie I, donc on peut passer à la limite quand $n \to +\infty$. On obtient finalement l'égalité :

$$I(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{x+1}} \Gamma(x+1) \boxed{= S(x+1)\Gamma(x+1).}$$

8. On prend $x = 1$ dans la relation précédente :

$$I(1) = S(2)\Gamma(2) = S(2) \boxed{= \frac{\pi^2}{12}.}$$

Partie III : Étude d'une variable aléatoire

9. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est un intervalle symétrique par rapport à 0. De plus on a :

$$f(-t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})2} = \frac{e^{-t}}{e^{-2t}(e^t+1)^2} = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = f(t).$$

Donc f est bien une fonction paire.

10. On a :

- f est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas ;
- $f(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \geq 0$ sur $\mathbb{R}$;
- Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. On a :

$$\int_0^a \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{1+e^t} \right]_0^a = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^a}$$

car de la forme $\frac{u'}{u^2}$ qui se primitive en $-\frac{1}{u}$. On a $\lim_{a \to +\infty} \frac{1}{1+e^a} = 0$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{2}$. Par parité, on en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Ainsi $\boxed{f \text{ est une densité d'une variable aléatoire réelle.}}$

11. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \mathrm{d}t$$

Soit $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^x \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{1+e^t} \right]_a^x = \frac{1}{1+e^a} - \frac{1}{1+e^x} \underset{a \to -\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{1+e^x}.$$

On obtient donc pour fonction de répartition de X la fonction $F : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 - \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x} \boxed{= \frac{1}{1+e^{-x}}.}$

12. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^n \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\mathrm{d}t$.

La fonction $t \mapsto t^n \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc l'intégrale est généralisée en $+\infty$.

On a :

- $t^n \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2} \underset{+\infty}{\sim} t^n e^{-t}$;
- $t^n e^{-t} \geq 0$ pour tout $t \geq 0$;
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$ converge (fonction Gamma avec $n > -1$).

Par théorème de comparaison, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Par parité de $t \mapsto |t^n f(t)|$, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t^n f(t)|\mathrm{d}t$ converge également.

On peut donc conclure que $\boxed{X \text{ admet un moment d'ordre } n}$, noté dans la suite $m_n(X)$.

(b) La fonction $t \mapsto t^{2p+1}f(t)$ est impaire, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2p+1}f(t)\mathrm{d}t$ converge. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+1}f(t)\mathrm{d}t$ converge également et vaut 0. Ainsi on a $\boxed{m_{2p+1}(X) = 0 \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}.}$

(c) Soit $p \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$. On effectue une intégration par parties sur le **segment** $[0,a]$.

$$\begin{array}{c|ccc} + & t^{2p} & & \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2} \\ & & \searrow & \\ - & 2pt^{2p-1} & \overset{\int}{\longleftarrow} & -\dfrac{1}{1+e^t} \end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto t^{2p}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+e^t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,a]$. On obtient donc :

$$\int_0^a t^{2p} f(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^{2p}}{1+e^t}\right]_0^a + 2p\int_0^a \frac{t^{2p-1}}{1+e^t}\mathrm{d}t = -\frac{a^{2p}}{1+e^a} + 2p\int_0^a \frac{t^{2p-1}}{1+e^t}\mathrm{d}t$$

Toutes les intégrales en jeu convergent en $+\infty$. De plus on a $\dfrac{a^{2p}}{1+e^a} \underset{+\infty}{\sim} a^{2p}e^{-a}$ qui tend vers 0 en $+\infty$ par croissances comparées. On obtient donc en passant à la limite quand $a \to +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} t^{2p} f(t)\mathrm{d}t = 2p\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p-1}}{1+e^t}\mathrm{d}t$$

et par parité de $t \mapsto t^{2p}f(t)$,

$$\frac{1}{2}m_{2p}(X) = 2I(2p-1) \qquad \text{soit encore} \qquad \boxed{m_{2p}(X) = 4p\, I(2p-1).}$$

13. On a vu que X admettait des moments d'ordre 1 et 2, donc une espérance et une variance. De plus on a :

$$E(X) = m_1(X) \boxed{= 0},$$

$$V(X) = m_2(X) - m_1(X)^2 = m_2(X) = 4I(1) = 4\frac{\pi^2}{12} \boxed{= \frac{\pi^2}{3}.}$$

14. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$[Y_n \leq x] = \bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x]$$

D'où en prenant la probabilité de ces évènements :

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) = P(Y_n \leq x) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i \leq x]\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) \quad \text{par indépendance} \\ &= F_{X_1}(x)^n \quad \text{car les variables suivent la même loi} \\ &\boxed{= \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^n} \end{aligned}$$

Soit toujours $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(x) &= P(Z_n \leq x) = P(Y_n - \ln(n) \leq x) = P(Y_n \leq x + \ln(n)) \\ &= F_{Y_n}(x + \ln(n)) = \left(\frac{1}{1+e^{-x-\ln(n)}}\right)^n \boxed{= \frac{1}{(1+\frac{e^{-x}}{n})^n}} \end{aligned}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$ **fixé**. On a :

$$\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right)\right).$$

On a $n\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{e^{-x}}{n} = e^{-x}$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right) = e^{-x}$, d'où par passage à la limite (la fonction exponentielle est continue), on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right)\right) = e^{e^{-x}}.$$

On obtient donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = e^{-e^{-x}}.$$

Posons $F : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-e^{-x}}$. On regarde si cette fonction est bien une fonction de répartition d'une variable à densité :

- F est bien continue sur $\mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
- F est dérivable comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}} > 0$. Donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction F est une bien une fonction de répartition d'une variable aléatoire Z. On en déduit donc que la suite $\boxed{(Z_n) \text{ converge en loi vers la variable } Z.}$

Enfin F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont. Donc $\boxed{Z \text{ est à densité}}$, et une densité de Z est donnée par :

$$\boxed{h : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x}e^{-e^{-x}}.}$$

Problème 2 (EM Lyon 2010)

EM LYON 2010 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

PROBLÈME 1

Partie I : Résultats généraux sur les matrices stochastiques - Illustrations

---

Remarque *Dans la suite nous noterons* $[\![1,p]\!]$ *l'ensemble* $\{1,\ldots,p\}$.

Pour toute matrice C *de* $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ *ou de* $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ *et pour tout* i *dans* $[\![1,p]\!]$ *nous noterons* $(C)_i$ *le coefficient de* C *situé sur la* $i^{\text{ème}}$ *ligne.*

1. a. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

$$A\in\mathcal{ST}_p \Longleftrightarrow \begin{cases}\forall (i,j)\in[\![1,p]\!]^2,\ (A)_{i,j}\geqslant 0\\ \forall i\in[\![1,p]\!],\ \sum\limits_{j=1}^{p}(A)_{i,j}=1\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\forall (i,j)\in[\![1,p]\!]^2,\ (A)_{i,j}\geqslant 0\\ \forall i\in[\![1,p]\!],\ \sum\limits_{j=1}^{p}\Big((A)_{i,j}\times 1\Big)=1\end{cases}.$$

$$A\in\mathcal{ST}_p \Longleftrightarrow \begin{cases}\forall (i,j)\in[\![1,p]\!]^2,\ (A)_{i,j}\geqslant 0\\ \forall i\in[\![1,p]\!],\ \sum\limits_{j=1}^{p}\Big((A)_{i,j}\,(V)_j\Big)=(V)_i\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\forall (i,j)\in[\![1,p]\!]^2,\ (A)_{i,j}\geqslant 0\\ AV=V\end{cases}.$$

$$\boxed{\text{Pour toute matrice } A \text{ de } \mathcal{M}_p(\mathbb{R}),\ A\in\mathcal{ST}_p \Longleftrightarrow \begin{cases}\forall (i,j)\in[\![1,p]\!]^2,\ (A)_{i,j}\geqslant 0\\ AV=V\end{cases}.}$$

1. b. Soit A un élément de $\mathcal{ST}_p$. V n'est pas nul(le) et $AV=V$. Donc 1 est valeur propre de A et V en est un vecteur propre associé.

$$\boxed{\text{1 est une valeur propre commune à toutes les matrices de } \mathcal{ST}_p.}$$

2. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{ST}_p$.

• Soient i et j deux éléments de $[\![1,p]\!]$. $(AB)_{i,j}=\sum\limits_{k=1}^{p}\Big((A)_{i,k}\,(B)_{k,j}\Big)$.

Or $\forall k\in[\![1,p]\!],\ (A)_{i,k}\geqslant 0$ et $(B)_{k,j}\geqslant 0$ car A et B sont des éléments de $\mathcal{ST}_p$.

Donc $\forall k\in[\![1,p]\!],\ (A)_{i,k}\,(B)_{k,j}\geqslant 0$. Ainsi $(AB)_{i,j}=\sum\limits_{k=1}^{p}\Big((A)_{i,k}\,(B)_{k,j}\Big)\geqslant 0$, et ceci pour tout (i,j) dans $[\![1,p]\!]^2$.

• $AV=V$ et $BV=V$ car A et B sont des éléments de $\mathcal{ST}_p$, donc $(AB)V=A(BV)=AV=V$.

Ceci achève de montrer que AB est un élément de $\mathcal{ST}_p$.

$$\boxed{\text{Le produit de deux éléments de } \mathcal{ST}_p \text{ est un élément de } \mathcal{ST}_p.}$$

3. a) A_1 est une matrice triangulaire inférieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux c'est à dire 1, $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{3}$.

A_1 est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant 3 valeurs propres distinctes donc A_1 est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

$$\boxed{A_1 \text{ est diagonalisable et le sous-espace propre de } A_1 \text{ associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.}}$$

Remarque Notons que SEP $(A_1, 1) = \text{Vect}(V)$, SEP $\left(A_1, \dfrac{1}{2}\right) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$, SEP $\left(A_1, \dfrac{1}{3}\right) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

3. b. (i) • Les coefficients de A_3 sont des réels positifs ou nuls.

• $A_3 V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V.$

Donc A_3 est un élément de $\mathcal{ST}_3$.

• A_3 est une matrice triangulaire inférieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.

Ainsi les deux valeurs propres de A_3 sont 1 et $\dfrac{1}{2}$.

Cherchons les dimensions des sous-espaces propres de A_3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

$$X \in \text{SEP } (A_3, 1) \iff A_3 X = X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = x \\ (1/2)\,x + (1/2)\,y = y \\ (1/2)\,y + (1/2)\,z = z \end{cases}.$$

$X \in \text{SEP } (A_3, 1) \iff \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$. Ainsi SEP $(A_3, 1) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Alors $\dim \text{SEP } (A_3, 1) = 1$.

$$X \in \text{SEP } \left(A_3, \frac{1}{2}\right) \iff A_3 X = \frac{1}{2} X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$X \in \text{SEP } \left(A_3, \frac{1}{2}\right) \iff \begin{cases} x = (1/2)\,x \\ (1/2)\,x + (1/2)\,y = (1/2)\,y \\ (1/2)\,y + (1/2)\,z = (1/2)\,z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Ainsi SEP $\left(A_3, \dfrac{1}{2}\right) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$. Alors $\dim \text{SEP } \left(A_3, \dfrac{1}{2}\right) = 1$.

$\dim \mathrm{SEP}\left(A_3, \dfrac{1}{2}\right) + \dim \mathrm{SEP}\left(A_3, \dfrac{1}{2}\right) = 2 \neq 3$. A_3 n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

A_3 est une matrice de $\mathcal{ST}_3$ qui n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

$$\boxed{\text{Il existe au moins un élément de } \mathcal{ST}_3 \text{ non diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \text{, par exemple } A_3.}$$

3. b. (ii) • Les coefficients de A_2 sont des réels positifs ou nuls.

• $A_2V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V$.

Donc A_2 est un élément de $\mathcal{ST}_3$. 1 est donc valeur propre de A_2.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \mathrm{SEP}\ (A_2, 1) \iff A_2X = X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = x \\ (1/2)\, y + (1/2)\, z = y \\ (1/2)\, y + (1/2)\, z = z \end{cases}.$$

$X \in \mathrm{SEP}\ (A_3, 1) \iff z = y$. Ainsi SEP $(A_2, 1)$ est l'hyperplan de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ d'équation $y - z = 0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Par conséquent SEP $(A_2, 1)$ est de dimension 2.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'affirmation << Pour tout élément } A \text{ de } \mathcal{ST}_3\text{, le sous-espace propre pour } A \text{ associé à la valeur propre} \\ \text{1 est de dimension 1 >> est fausse .}\end{array}}$$

4. a. $AX = \lambda\, X$ donc $\forall k \in [\![1, p]\!],\ (AX)_k = \lambda\,(X)_k$. En particulier $(AX)_i = \lambda\,(X)_i = \lambda\, x_i$.

Alors : $|\lambda|\,|x_i| = |\lambda\, x_i| = |(AX)_i| = \left|\displaystyle\sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j}\, x_j\right| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{p} |(A)_{i,j}\, x_j| = \sum_{j=1}^{p} |(A)_{i,j}|\,|x_j| = \sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j}\,|x_j|$ (les coefficients de A sont des réels positifs ou nuls).

Or $\forall j \in [\![1, p]\!],\ |x_j| \leqslant |x_i|$ et $(A)_{i,j} \geqslant 0$. Donc : $|\lambda|\,|x_i| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j}\,|x_i| = |x_i| \sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j} = |x_i| \times 1 = |x_i|$.

$$\boxed{|\lambda\, x_i| \leqslant |x_i|.}$$

4. b. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ n'est pas nul(le) donc $|x_i|$ n'est pas nul car $|x_i| = \displaystyle\operatorname*{Max}_{1 \leqslant k \leqslant p} |x_k|$.

Alors $|\lambda|\,|x_i| = |\lambda\, x_i| \leqslant |x_i|$ et $|x_i| > 0$. Par division on obtient : $|\lambda| \leqslant 1$.

$$\boxed{|\lambda| \leqslant 1.}$$

$\boxed{\text{Les valeurs propres dans } \mathbb{C} \text{ des éléments de } \mathcal{ST}_p \text{ ont un module inférieur ou égal à 1.}}$

Partie II : Suites des moyennes de puissances de matrices stochastiques

1. a. Montrons par récurrence que pour tout élément n de $\mathbb{N}$, A^n appartient à $\mathcal{ST}_p$.

• I_p est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls. De plus $I_p\,V = V$.

Ainsi I_p est un élément de $\mathcal{ST}_p$. Alors A^0 appartient à $\mathcal{ST}_p$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.

• Supposons que pour un élément n de $\mathbb{N}$, A^n soit un élément de $\mathcal{ST}_p$.

A et A^n sont alors deux éléments de $\mathcal{ST}_p$. D'après **I 2.** leur produit est un élément de $\mathcal{ST}_p$.

Alors A^{n+1} appartient à $\mathcal{ST}_p$. Ceci achève la récurrence.

$\boxed{\text{Pour toute matrice } A \text{ de } \mathcal{ST}_p \text{ et pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ A^n \text{ est une matrice de } \mathcal{ST}_p.}$

1. b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

• Pour tout k dans $\mathbb{N}$, A^k appartient à $\mathcal{ST}_p$. Donc pour tout k dans $\mathbb{N}$, A^k est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls.

Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k$ est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls.

Il en est de même pour $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k$.

• Pour tout k dans $\mathbb{N}$, A^k appartient à $\mathcal{ST}_p$. Donc pour tout k dans $\mathbb{N}$, $A^k\,V = V$. Alors :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k\right) V = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (A^k\,V) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} V = \frac{1}{n}\,(n\,V) = V.$$

Ceci achève de montrer que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k$ appartient à $\mathcal{ST}_p$.

$$\boxed{\text{Pour toute matrice } A \text{ de } \mathcal{ST}_p \text{ et pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k \text{ est une matrice de } \mathcal{ST}_p.}$$

Exercice Montrer que $\mathcal{ST}_p$ est un convexe de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et retrouver le résultat précédent.

2. Soit x un réel tel que $|x| \leqslant 1$ et soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \begin{cases} n & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{1-x^n}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$. Ce qui donne encore : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1-x^n}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$.

Donc si $x = 1$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) = 1$! Supposons que x ne vaut pas 1. Alors $x \in [-1, 1[$, donc $|x| \leqslant 1$.

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right| = \frac{1}{n}\,\frac{|1-x^n|}{1-x} \leqslant \frac{1}{n}\,\frac{1+|x|^n}{1-x} \leqslant \frac{1}{n}\,\frac{1+1}{1-x} = \frac{1}{n}\,\frac{2}{1-x}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\,\frac{2}{1-x}\right) = 0$ il vient par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) = 0$.

Finalement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ tel que } |x| \leqslant 1 : \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1 \end{cases}.}$$

3. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit (i, j) un élément de $[\![1, p]\!]^2$.

• Supposons i et j distincts. Notons que pour tout k dans $\mathbb{N}$, D^k est une matrice diagonale.

Alors : $\displaystyle (M_n)_{i,j} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D^k\right)_{i,j} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (D^k)_{i,j} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 0 = 0$. Par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (M_n)_{i,j} = 0$.

Soit encore $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (M_n)_{i,j} = (\Delta)_{i,j}$.

• Montrons maintenant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (M_n)_{i,i} = (\Delta)_{i,i}$.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, $(D^k)_{i,i} = \big((D)_{i,i}\big)^k$ (car D^k est diagonale).

Alors : $\displaystyle (M_n)_{i,i} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D^k\right)_{i,i} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (D^k)_{i,i} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \big((D)_{i,i}\big)^k$.

D est semblable à A donc D a les mêmes valeurs propres que A. Or D est diagonale donc ses valeurs propres sont ses élément diagonaux. Ainsi le spectre de D est l'ensemble $\{(D)_{i,i}\,;\, i \in [\![1, p]\!]\}$.

Les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ ont un module inférieur ou égal à 1. Ainsi pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, $(D)_{i,i}$ est un réel dont la valeur absolue est au plus 1.

Rappelons que par hypothèse $(D)_{i,i} = 1$ si $i \in [\![1, r]\!]$ et $(D)_{i,i} \neq 1$ sinon.

Plus de doute alors, d'après ce qui précède : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (M_n)_{i,i} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\big((D)_{i,i}\big)^k\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in [\![1, r]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Soit encore $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (M_n)_{i,i} = (\Delta)_{i,i}$.

Finalement $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (M_n)_{i,j} = (\Delta)_{i,j}$ et ainsi la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers Δ.

$$\boxed{\text{La suite } (M_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } \Delta.}$$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = P$ et $V_n = P^{-1}$.

La suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers P et la suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers P^{-1}.

D'après ce qui est admis la suite $(U_n\, M_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $P\,\Delta$.

Toujours en utilisant la même propriété, on peut alors dire que la suite $\Big((U_n\, M_n)\, V_n\Big)_{n\geqslant 1}$ converge vers $(P\,\Delta)\,P^{-1}$.

Notons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (U_n\, M_n)\, V_n = P\, M_n\, P^{-1} = B_n$ et que $B = P\,\Delta\,P^{-1}$. Plus de doute :

$$\boxed{\text{la suite } (B_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } B.}$$

N'en restons pas là et observons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n = P\, M_n\, P^{-1} = P\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} D^k\right)P^{-1}$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (P\,D^k\,P^{-1}) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (P\,D\,P^{-1})^k = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k$.

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k\right)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } P\,\Delta\,P^{-1}.}$$

4. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Nous venons de voir que $B_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k$. Alors d'après **II 1. b.**, B_n appartient à $\mathcal{ST}_p$ car A appartient à $\mathcal{ST}_p$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n \in \mathcal{ST}_p.}$$

4. b. Rappelons que B est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et que $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ B_{i,j} = \lim\limits_{n\to+\infty} (B_n)_{i,j}$.

De plus pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, B_n appartient à $\mathcal{ST}_p$.

- $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (B_n)_{i,j} \geqslant 0$. En passant à la limite il vient : $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ B_{i,j} \geqslant 0$.
- $\forall i \in [\![1,p]\!], \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} (B_n)_{i,j} = 1$. En passant à la limite il vient : $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} B_{i,j} = 1$.

Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{B \text{ appartient à } \mathcal{ST}_p.}$$

Remarque *Pour le second point il était tentant de passer à la limite sur $B_n\, V = V$ sauf que le préliminaire n'évoque pas cette possilbilité !.*

Exercice *Montrer que toute suite convergente d'éléments de $\mathcal{ST}_p$ a sa limite dans $\mathcal{ST}_p$ (et qu'ainsi $\mathcal{ST}_p$ est un fermé de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$).*

Partie III : Aspect probabiliste

Remarque Nous ne serons pas plus royaliste que le "roi concepteur" et nous ne soulèverons pas de difficulté au niveau des probabilités conditionnelles sur la nullité de la probabilité de l'événement qui conditionne...

1. • Pour tout (i,j) dans $[\![1,3]\!]^2$, $A_{i,j}$ est une probabilité donc $A_{i,j}$ est un réel positif ou nul.

• Soit i dans $[\![1,3]\!]$.

Rappelons que $P_{(X_0=i)}$ est une probabilité et que $\big((X_1=j)\big)_{j\in[\![1,3]\!]}$ est un système complet d'événements.

Alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{3} P_{(X_0=i)}(X_1=j) = P_{(X_0=i)}\left(\bigcup_{j=1}^{3}(X_1=j)\right) = P_{(X_0=i)}(\Omega) = 1.$

Donc $\forall i \in [\![1,3]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{3} A_{i,j} = 1$. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{A \in \mathcal{ST}_3.}$$

2. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Soit j un élément de $[\![1,3]\!]$.

$\big((X_n=i)\big)_{i\in[\![1,3]\!]}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne :

$P(X_{n+1}=j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\Big(P(X_n=i)\,P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)\Big).$

Or $\forall i \in [\![1,3]\!],\ P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j) = P_{(X_0=i)}(X_1=j) = A_{i,j}.$

Alors : $(L_{n+1})_j = P(X_{n+1}=j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\Big(P(X_n=i)\,A_{i,j}\Big) = \sum_{i=1}^{3}\Big((L_n)_i\,A_{i,j}\Big).$

Finalement $\forall j \in [\![1,3]\!],\ (L_{n+1})_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\Big((L_n)_i\,A_{i,j}\Big)$. Ce qui signifie que $L_{n+1} = L_n\,A$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ L_{n+1} = L_n\,A.}$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ L_n = L_0\,A^n$.

• La propriété est vraie pour $n=0$ car $A^0 = I_3$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$L_{n+1} = L_n\,A = (L_0\,A^n)\,A = L_0\,A^{n+1}$. Ce qui achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ L_n = L_0\,A^n.}$$

3. Nous savons déjà que les valeurs propres de A_1 sont 1, 1/2 et 1/3, que ses sous-espaces propres sont de dimension 1 et que A_1 est diagonalisable.

Nous savons également que SEP $(A_1, 1) = \text{Vect}(V) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Observons que : $A_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un élément non nul de SEP $\left(A_1, \dfrac{1}{3}\right)$ qui est une droite vectorielle.

Ainsi SEP $\left(A_1, \dfrac{1}{3}\right) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Déterminons SEP $\left(A_1, \dfrac{1}{2}\right)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$X \in \text{SEP}\left(A_1, \dfrac{1}{2}\right) \iff A_1 X = \dfrac{1}{2} X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1/2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$X \in \text{SEP}\left(A_1, \dfrac{1}{2}\right) \iff \begin{cases} x = (1/2)\,x \\ (1/2)\,x + (1/2)\,y = (1/2)\,y \\ (1/3)\,x + (1/3)\,y + (1/3)\,z = (1/2)\,z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ 0 + (1/2)\,y = (1/2)\,y \\ 0 + (1/3)\,y + (1/3)\,z = (1/2)\,z \end{cases}$.

$X \in \text{SEP}\left(A_1, \dfrac{1}{2}\right) \iff \begin{cases} x = 0 \\ (1/3)\,y = (1/6)\,z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 2\,y \end{cases}$.

Alors SEP $\left(A_1, \dfrac{1}{2}\right) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$.

$\mathcal{B}_1 = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, $\mathcal{B}_2 = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ et $\mathcal{B}_3 = (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ sont respectivement des bases de SEP $(A_1, 1)$, SEP $\left(A_1, \dfrac{1}{2}\right)$ et SEP $\left(A_1, \dfrac{1}{3}\right)$.

Rappelons que : $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \text{SEP}\,(A_1, 1) \oplus \text{SEP}\left(A_1, \dfrac{1}{2}\right) \oplus \text{SEP}\left(A_1, \dfrac{1}{3}\right)$.

Alors $\mathcal{B} ='' \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3'' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A_1 respectivement associés aux valeurs propres 1, $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{3}$.

Notons P_1 la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, P_1 est inversible et $P_1^{-1}\,A\,P = \text{Diag}(1, 1/2, 1/3) = D_1$.

Notons que $A = P_1\, D_1\, P_1^{-1}$.

$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telle que $A = P_1\, D_1\, P_1^{-1}$.

Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ tels que $P_1\, X = X'$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Donc $\begin{cases} x = x' \\ x + y = y' \\ x + 2y + z = z' \end{cases}$.

Ce qui donne aisément : $\begin{cases} x = x' \\ y = -x + y' = -x' + y' \\ z = -x - 2y + z' = -x' - 2(-x' + y') + z' \end{cases}$. Ainsi $\begin{cases} x = x' \\ y = -x' + y' \\ z = x' - 2y' + z' \end{cases}$.

Ceci permet d'affirmer que :

$$\boxed{P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

4. $D_1 = \mathrm{Diag}\,(1, 1/2, 1/3)$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_1^n = \mathrm{Diag}\,(1, (1/2)^n, (1/3)^n)$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (1/2)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (1/3)^n = 0$ car $|(1/2)| < 1$ et $|(1/3)| < 1$.

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} D_1^n = \mathrm{Diag}\,(1, 0, 0)$.

$$\boxed{\text{La suite } (D_1^n)_{n \geqslant 1} \text{ converge vers } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

$A_1 = P_1\, D_1\, P_1^{-1}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_1^n = (P_1\, D_1\, P_1^{-1})^n = P_1\, D_1^n\, P_1^{-1}$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n = P_1$ et $S_n = P_1^{-1}$. Posons encore $\widehat{D_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$(R_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers P_1 et $(D_1^n)_{n \geqslant 1}$ converge vers $\widehat{D_1}$ donc $(R_n\, D_1^n)_{n \geqslant 1}$ converge vers $P_1\, \widehat{D_1}$.

Comme $(S_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers P_1^{-1}, $\big((R_n\, D_1^n)\, S_n\big)_{n \geqslant 1}$ converge vers $(P_1\, \widehat{D_1})\, P_1^{-1}$.

Ce qui signifie que $(P_1\, D_1^n\, P_1^{-1})_{n \geqslant 1}$ converge vers $P_1\, \widehat{D_1}\, P_1^{-1}$ ou que $(A_1^n)_{n \geqslant 1}$ converge vers $P_1\, \widehat{D_1}\, P_1^{-1}$.

$$P_1\, \widehat{D_1}\, P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{La suite } (A_1^n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

5. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ L_n = L_0\, A_1^n$. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = L_0$.

La suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers L_0, la suite $(A_1^n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc la suite $(H_n\, A_1^n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $L_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi la suite $(L_0\, A_1^n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $L_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La suite $(L_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $L_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$L_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \big(P(X_0=1)\ P(X_0=2)\ P(X_0=3)\big) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$L_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \big(P(X_0=1)+P(X_0=2)+P(X_0=3)\ 0\ 0\big) = (1\ 0\ 0).$$

$$\boxed{\text{La suite } (L_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } (1\ 0\ 0).}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(X_n=1)=1,\ \lim_{n\to+\infty} P(X_n=2)=0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} P(X_n=3)=0.}$$

$$\boxed{\text{Donc la suite } (X_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge en loi vers la variable certaine égale à 1.}}$$

Observons que pour obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=1)=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=2)=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=3)=0$ il suffit d'obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=1)=1$.

Rappelons que $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2,\ P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j) = (A_1)_{i,j}$.

Alors : $\begin{cases} P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=1,\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)=0,\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=3)=0 \\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=1/2,\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)=1/2,\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=3)=0 \\ P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=1)=1/3,\ P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=2)=1/3,\ P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=3)=1/3 \end{cases}$.

Notons que l'urne 1 est "absorbante" car si à un instant n l'objet est dans cette urne il y reste aux instants suivants (presque sûrement...). Donc si presque sûrement il se trouve à un instant dans l'urne 1, presque sûrement il y restera et nous aurons $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=1)=1$.

C'est le cas si au départ il est dans l'urne 1.

Supposons maintenant qu'au départ l'objet soit dans l'urne 2. La probabilité pour qu'à l'instant suivant il ne soit pas dans l'urne 1 est 1/2. La probabilité pour qu'il ne soit pas dans l'urne 1 au cours des n premiers instants ($n \in \mathbb{N}^*$) est $(1/2)^n$. La probabilité pour qu'il ne soit jamais dans l'urne 1 est $\lim\limits_{n \to +\infty} (1/2)^n$ donc 0. Donc presque sûrement à un instant l'objet se trouvera dans l'urne 1 et ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 1) = 1$.

Supposons maintenant qu'au départ l'objet soit dans l'urne 3. La probabilité pour qu'à l'instant suivant il reste dans l'urne 3 est 1/3. La probabilité pour qu'il soit dans l'urne 3 au cours des n premiers instants ($n \in \mathbb{N}^*$) est $(1/3)^n$. La probabilité pour qu'il reste toujours dans l'urne 3 est $\lim\limits_{n \to +\infty} (1/3)^n = 0$ donc 0. Donc presque sûrement à un instant l'objet se trouvera dans l'urne 1 ou dans l'urne 2. Comme dans le cas précédent si à un instant il se trouve dans l'urne 2, presque sûrement à un instant l'objet se trouvera dans l'urne 1. Ainsi si l'objet se trouve au départ dans l'urne 3, presque sûrement à un instant l'objet se trouvera dans l'urne 1 et nous aurons encore $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 1) = 1$.
