DS8

Correction du devoir surveillé

Problème 1. (Ecricome 2021

Partie 1 : Estimateur du maximum de vraisemblance

1. (a) On peut par exemple proposer le code suivant :

```
function V=sim_V(n,a)
    V=max(grand(1,n,'unf',0,a))
endfunction
```

(b) Il semble que $\boxed{V_n \text{ converge en loi ou en probabilité (?) vers la variable certaine à 1.}}$

2. (a) On a : $\boxed{F_{X_1} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{a} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 1 & \text{si } a < x. \end{cases}}$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$F_{V_n}(x) = P(V_n \leqslant x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant x) = P([X_1 \leqslant x] \cap \dots \cap [X_n \leqslant x]).$$

Comme les X_k sont indépendantes et de même loi, on obtient :

$$F_{V_n}(x) = (P(X_1 \leqslant x))^n = (F_{X_1}(x))^n \boxed{= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \left(\frac{x}{a}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 1 & \text{si } a < x. \end{cases}}$$

(c) F_{X_1} étant la fonction de répartition de la variable X_1 à densité, elle est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en a. Donc $F_{V_n} : x \mapsto (F_{X_1}(x)))^n$ l'est également par produit. Ainsi $\boxed{V_n \text{ est une variable à densité}}$, et une densité de V_n est par exemple (en prenant des valeurs arbitraires en 0 et en a) :

$$\boxed{f_{V_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{n}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 0 & \text{si } a < x. \end{cases}}$$

3. Puisque $V_n(\Omega) \subset [0, a]$, V_n est une variable bornée, et admet donc des moments à tout ordre. En particulier, $\boxed{V_n \text{ admet une espérance.}}$ De plus, on a :

$$E(V_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{V_n}(x)\mathrm{d}x = \int_0^a x\frac{n}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{n}{a^n}\int_0^a x^n \mathrm{d}x = \frac{n}{a^n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^a \boxed{= \frac{na}{n+1}.}$$

En tant qu'estimateur de a, le biais de V_n est :

$$b_a(V_n) = E(V_n) - a = \frac{na}{n+1} - a = \frac{-a}{n+1}.$$

Le biais est strictement négatif car $a > 0$ donc $\boxed{V_n \text{ n'est pas un estimateur sans biais de } a.}$

4. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$P(|V_n - a| \geqslant \varepsilon) = 1 - P(|V_n - a| < \varepsilon) = 1 - P(-\varepsilon < V_n - a < \varepsilon) = 1 - P(a - \varepsilon < V_n < a + \varepsilon).$$

Comme V_n est à densité, on a :

$$P(|V_n - a| \geqslant \varepsilon) = 1 - (F_{V_n}(a + \varepsilon) - F_{V_n}(a - \varepsilon)).$$

Comme $\varepsilon > 0$, on a $a+\varepsilon > a$ et donc $F_{V_n}(a+\varepsilon) = 1$. On a donc :

$$\boxed{P\left(|V_n - a| \geqslant \varepsilon\right) = 1 - \left(1 - F_{V_n}(a-\varepsilon)\right) = F_{V_n}(a-\varepsilon).}$$

Si $a - \varepsilon \leqslant 0$, alors $F_{V_n}(a-\varepsilon) = 0$ et on a :

$$P\left(|V_n - a| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Sinon, on a $0 < a-\varepsilon < a$ et $F_{V_n}(a-\varepsilon) = \left(\frac{a-\varepsilon}{a}\right)^n$. Et comme $0 < \frac{a-\varepsilon}{a} < 1$, on a $\left(\frac{a-\varepsilon}{a}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte que :

$$P\left(|V_n - a| \geqslant \varepsilon\right) = \left(\frac{a-\varepsilon}{a}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dans tous les cas, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(|V_n - a| \geqslant \varepsilon\right) 0$. Donc V_n converge en probabilité vers a, et $\boxed{\text{l'estimateur } V_n \text{ est convergent.}}$

5. (a) Puisque V_n est bornée, $\boxed{\text{elle admet un moment d'ordre 2.}}$ De plus, on a :

$$E\left(V_n^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{V_n}(x)\mathrm{d}x = \int_0^a x^2 \frac{n}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{n}{a^n}\int_0^a x^{n+1}\mathrm{d}x = \frac{n}{a^n}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^a \boxed{= \frac{na^2}{n+2}.}$$

(b) Par la formule de Huygens, on a :

$$V\left(V_n\right) = E\left(V_n^2\right) - E\left(V_n\right)^2 = \frac{na^2}{n+2} - \left(\frac{na}{n+1}\right)^2.$$

On en déduit que le risque de V_n comme estimateur de a est :

$$\begin{aligned} r_a(V_n) = V\left(V_n\right) + b_a(V_n)^2 &= \frac{na^2}{n+2} - \left(\frac{na}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{a}{n+1}\right)^2 = \frac{na^2}{n+2} - \frac{n^2a^2}{(n+1)^2} + \frac{a^2}{(n+1)^2} \\ &= a^2\left(\frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2) + (n+2)}{(n+2)(n+1)^2}\right) = a^2\left(\frac{n^3+2n^2+n-(n^3+2n^2)+n+2}{(n+2)(n+1)^2}\right) \\ &= a^2\left(\frac{2n+2}{(n+2)(n+1)^2}\right) \boxed{= a^2\left(\frac{2}{(n+2)(n+1)}\right).} \end{aligned}$$

Il est clair que ce risque tend vers 0 quand $n\to+\infty$. Donc $\boxed{\text{l'estimteur } V_n \text{ de } a \text{ est convergent.}}$ On retrouve ici le résultat obtenu à la question 4.

Partie 2 : Méthode des moments

6. On propose la fonction suivante :

```
function y=sim_M(n,a)
    y=2*sum(grand(1,n,'unf',0,a))/n
endfunction
```

7. $\overline{X}_n$ est une somme de variables ayant une espérance. Par linéarité de l'espérance, $\overline{X}_n$ a une espérance et :

$$E\left(\overline{X}_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n E\left(X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{a}{2} = \frac{1}{n}n\frac{a}{2} \boxed{= \frac{a}{2}.}$$

$\overline{X}_n$ est une somme de variables indépendantes ayant une variance donc $\overline{X}_n$ a une variance et :

$$V\left(\overline{X}_n\right) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n V\left(X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \frac{a^2}{12} = \frac{1}{n^2}n\frac{a^2}{12} \boxed{= \frac{a^2}{12n}.}$$

Ainsi, $E(M_n) = E\left(2\overline{X}_n\right) = 2\times\frac{a}{2} = a$, et $\boxed{M_n \text{ est bien un estimateur sans biais de } a.}$

8. Comme $\overline{X}_n$ a une variance, M_n également et on a :

$$V(M_n) = V\left(2\overline{X}_n\right) = 4V\left(\overline{X}_n\right) = \frac{a^2}{3n}.$$

Comme M_n est sans biais, on a :

$$r_a(M_n) = (b_a(M_n))^2 + V_a(M_n) = V_a(M_n) \boxed{= \frac{a^2}{3n}.}$$

Puisque $r_a(M_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, $\boxed{M_n \text{ est un estimateur convergent de } a.}$

9. Le risque de M_n est $\frac{a^2}{3n}$, celui de V_n est $\frac{2a^2}{(n+2)(n+1)}$, la différence est

$$\begin{aligned} r_a(M_n) - r_a(V_n) &= \frac{a^2}{3n} - \frac{2a^2}{(n+2)(n+1)} = \frac{a^2}{3n(n+2)(n+1)}\left((n+2)(n+1) - 6n\right) \\ &= \frac{a^2}{3n(n+2)(n+1)}\left(n^2 - 3n + 1\right). \end{aligned}$$

La fonction polynomiale $x \mapsto x^2 - 3x + 1$ a un discriminant négatif, elle est donc de signe constant sur $\mathbb{R}$, et est du signe de son coefficient dominant, à savoir positif. Ainsi on a $\boxed{r_a(M_n) \geqslant r_a(V_n).}$

On voit sur les graphiques que M_n est plus erratique autour de a, ce qui illustre le fait que son risque est plus élevé.

Partie 3 : Consistance de ces estimateurs

10. (a) Soit $t \in]a, 2a]$. On a :

$$F_{V_n}(t) = P(V_n \leqslant t) = P\left(\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant t\right) = P\left([X_1 \leqslant t] \cap \dots \cap [X_n \leqslant t]\right).$$

L'indépendance des X_k permet d'écrire :

$$F_{V_n}(t) = P\left(X_1 \leqslant t\right) \times P\left(X_2 \leqslant t\right) \times \dots \times P\left(X_n \leqslant t\right).$$

Soit $k \geqslant 2$. X_k suit une loi $\mathscr{U}([0, a])$, donc pour $t > a$, on a $P\left(X_k \leqslant t\right) = 1$. On obtient donc :

$$F_{V_n}(t) = P\left(X_1 \leqslant t\right).$$

Or X_1 suit une loi $\mathcal{U}([0, 2a])$ et $a < t \leqslant 2a$, de sorte que :

$$\boxed{F_{V_n}(t) = \frac{t}{2a}.}$$

(b) Pour $n = 1$, on a $V_1 = X_1$ et $F_{V_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \frac{t}{2a} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 2a, \\ 1 & \text{si } 2a < t. \end{cases}$

Supposons $n > 1$. On a :

$$F_{V_n}(t) = P\left(X_1 \leqslant t\right) \times P\left(X_2 \leqslant t\right) \times \dots \times P\left(X_n \leqslant t\right) \boxed{= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \frac{t}{2a}\left(\frac{t}{a}\right)^{n-1} = \frac{t^n}{2a^n} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant a, \\ \frac{t}{2a} & \text{si } a < t \leqslant 2a, \\ 1 & \text{si } 2a < t \end{cases}}$$

Et cette formule reste valable pour $n = 1$.

Étudions la convergence en loi de la suite (V_n).

Étape 1. Convergence ponctuelle de F_{V_n}. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. On a :

- si $t \leqslant 0$, on a : $F_{V_n}(t) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$;
- si $0 < t < a$, on a $0 < \frac{t}{a} < 1$ et donc : $F_{V_n}(t) = \frac{1}{2}(\frac{t}{2a})^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$;
- si $a \leqslant t \leqslant 2a$, on a : $F_{V_n}(t) = \frac{t}{2a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{t}{a}$;
- si $2a < t$, on a : $F_{V_n}(t) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi, la fonction limite est :

$$F : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ \frac{t}{2a} & \text{si } a \leqslant t \leqslant 2a, \\ 1 & \text{si } 2a < t. \end{cases}$$

Étape 2. F est-elle une fonction de répartition d'une variable réelle ?
On vérifie les trois points caractérisant une fonction de répartition d'une variable réelle :

- On a bien $\lim\limits_{t\to-\infty} F(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = 1$.
- F est continue à droite (et même continue) sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en a et en $2a$, où l'on a :
$$\lim_{t\to a^+} F(t) = \frac{1}{2} = F(a) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 2a^+} F(t) = 1 = F(2a).$$
Donc F est continue à droite sur $\mathbb{R}$.
- F est croissante sur les intervalles $]-\infty, a[$, $[a, 2a]$ et $]2a, +\infty[$. De plus, on a $\lim\limits_{t\to a^-} F(t) = 0 < \dfrac{1}{2} = F(a)$ et $\lim\limits_{t\to 2a^+} F(t) = 1 \geq= F(2a)$. Donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle V.

On peut donc conclure que $\boxed{\text{la suite } (V_n) \text{ converge en loi vers la variable } V.}$

(c) On a :
$$P\left(V_n > \frac{3}{2}a\right) = 1 - P\left(V_n \leqslant \frac{3}{2}a\right) \underbrace{=}_{10.(a) \text{ avec } t=\frac{3}{2}\in]a,2a]} 1 - \frac{\frac{3}{2}a}{2a} \boxed{= \frac{1}{4}.}$$

Ainsi, on a $P\left(V_n - a > \frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{4}$. Or, on a l'inclusion $\left[V_n - a > \frac{1}{2}a\right] \subset \left[|V_n - a| > \frac{1}{2}a\right]$, d'où par croissance de la probabilité :
$$P\left(|V_n - a| > \frac{1}{2}a\right) \geqslant P\left(V_n - a > \frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{4}.$$

Il en résulte que $P\left(|V_n - a| > \frac{1}{2}a\right)$ ne peut pas tendre vers 0 quand $n \to +\infty$. Donc $\boxed{V_n \text{ n'est pas un estimateur convergent de } a.}$

11. (a) Soit $n \geqslant 2$. On a :
$$(n-1)M'_n = 2(X_2 + \cdots + X_n) = 2(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) - 2X_1 = nM_n - 2X_1.$$
D'où :
$$\boxed{M_n = \frac{2}{n}X_1 + \frac{n-1}{n}M'_n.}$$

(b) Soit $n \geqslant 2$, on a :
$$|M_n - a| = \left|\frac{2}{n}X_1 + \frac{n-1}{n}M'_n - a\right| = \left|\frac{2}{n}X_1 + \frac{n-1}{n}M'_n - \frac{n-1}{n}a - \frac{a}{n}\right| = \left|\frac{2X_1 - a}{n} + \frac{n-1}{n}(M'_n - a)\right|.$$
Par inégalité triangulaire, on obtient :
$$|M_n - a| \leq \frac{|2X_1 - a|}{n} + \frac{n-1}{n}\left|M'_n - a\right|.$$

Or, on a $0 \leqslant X_1 \leqslant 2a$, et donc $-a \leq 2X_1 - a \leq 3a$, de sorte que $|2X_1 - a| \leq 3a$. D'autre part, on a aussi $0 \leqslant \frac{n-1}{n} \leqslant 1$, ce qui donne finalement :

$$\boxed{|M_n - a| \leqslant \frac{3a}{n} + |M_n' - a|.}$$

(c) Soit $n \geqslant n_0$. On a $\frac{3a}{n} \leqslant \frac{3a}{n_0} < \varepsilon$. Prenons $\omega \in [|M_n' - a| < \varepsilon]$. On a $|M_n'(\omega) - a| < \varepsilon$, d'où avec l'inégalité établie à la question précédente :

$$|M_n(\omega) - a| \leqslant \frac{3a}{n} + |M_n'(\omega) - a| < 2\varepsilon.$$

Ainsi $\omega \in [|M_n - a| < 2\varepsilon]$, et on a l'inclusion entre évènements $\boxed{[|M_n' - a| < \varepsilon] \subset [|M_n - a| < 2\varepsilon].}$

(d) On en déduit par croissance de la probabilité que :

$$P\left(|M_n' - a| < \varepsilon\right) \leqslant P\left(|M_n - a| < 2\varepsilon\right).$$

Ce qui se réécrit aussi :

$$P\left(|M_n - a| \geqslant 2\varepsilon\right) = 1 - P\left(|M_n - a| < 2\varepsilon\right) \leqslant 1 - P\left(|M_n' - a| < \varepsilon\right) = P\left(|M_n' - a| \geqslant \varepsilon\right).$$

Or on sait que que (M_n') converge en probabilité vers a, d'où :

$$P\left(|M_n' - a| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Par théorème des gendarmes (une probabilité étant positive), on en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(|M_n - a| \geqslant 2\varepsilon\right) \text{ existe et vaut } 0.$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (M_n) \text{ converge en probabilité vers } a.}$

12. Avant perturbation, nous avions montré que les estimateurs M_n et V_n de a sont tous les deux convergents, et que V_n était un meilleur estimateur que M_n puisque sont risque quadratique était plus petit.

    Après perturbation, on constate que M_n reste encore un estimateur convergent de a, tandis que V_n ne l'est plus. $\boxed{\text{L'estimateur } M_n \text{ est donc moins sensible aux perturbations que } V_n.}$

Problème 2. (EM Lyon 2003)

Partie I : Inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique

1. Par hypothèse, f n'étant pas inversible, elle n'est pas bijective. Et puisque f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, c'est équivalent au fait que f n'est pas injective. Il existe donc $x \neq 0_E$ tel que $f(x) = 0_E = 0 \cdot x$. Ainsi $\boxed{0 \text{ est bien valeur propre de } f.}$

   De plus, f est diagonalisable en tant qu'endomorphisme symétrique. Si $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$, sa matrice dans une base de diagonalisation serait la matrice nulle, et donc on aurait $f = 0_{\mathscr{L}(E)}$, ce qui n'est pas le cas par hypothèse.Donc $\boxed{f \text{ admet au moins une valeur propre non nulle.}}$

2. (a) On a par bilinéarité du produit scalaire et symétrie de f :

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle = \langle x, \mu y\rangle \boxed{= \mu\langle x, y\rangle.}$$

(b) Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de f, alors pour tout $x \in E_\lambda(f)$ et $y \in E_\mu(f)$, on a par la question précédente :

$$\lambda\langle x, y\rangle = \mu\langle x, y\rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0.$$

Puisque $(\lambda - \mu) \neq 0$, on a donc $\langle x, y\rangle = 0$. Ainsi les sous-espaces propres $E_\lambda(f)$ et $E_\mu(f)$ sont orthogonaux. $\boxed{\text{Les sous-espaces propres de } f \text{ sont bien deux à deux orthogonaux.}}$

3. On souhaite montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)^\perp$. Soit pour cela $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $z \in E$ tel que $y = f(z)$. On a :

$$\langle x, y\rangle = \langle x, f(z)\rangle = \langle f(x), z\rangle = \langle 0_E, z\rangle = 0.$$

Ainsi x appartient à $\mathrm{Im}(f)^\perp$. D'où l'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)^\perp$.

De plus, on a :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) \overset{\text{Th. du rg.}}{=} \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f)^\perp).$$

Et donc puisqu'on a une inclusion entre deux espaces de même dimension, il s'agit d'une égalité : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)^\perp$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \text{ est le supplémentaire orthogonal de } \mathrm{Im}(f) \text{ dans } E.}$

4. Soit x un vecteur de E.

(a) Puisque f est diagonalisable (car c'est un endomorphisme symétrique), on a (en notant $\lambda_0 = 0$) :

$$E = \bigoplus_{i=0}^{k} E_{\lambda_i}(f).$$

Par définition de sous-espaces supplémentaires, on a donc :

$$\boxed{\exists!(x_0, x_1 \ldots, x_k) \in E_{\lambda_0}(f) \times E_{\lambda_1}(f) \times \cdots \times E_{\lambda_k}(f), \quad x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k.}$$

(b) Soit $0 \leq j \leq k$. Considérons p_j le projecteur orthogonal sur $E_{\lambda_j}(f)$. Déterminons $p_j(x_i)$ pour tout $0 \leq i \leq k$.

- Cas $i = j$. On a $x_j \in E_{\lambda_j}(f) = \mathrm{Im}(p_j) = \mathrm{Ker}(p_j - \mathrm{id}_E)$ par propriété du cours sur les projecteurs, d'où :
$$p_j(x_j) = x_j.$$
- Cas $i \neq j$. Par la question 2, $E_{\lambda_i}(f)$ est orthogonal à $E_{\lambda_j}(f)$, ce qui s'écrit $E_{\lambda_i}(f) \subset E_{\lambda_j}(f)^\perp = \mathrm{Ker}(p_j)$. D'où puisque $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$:
$$p_j(x_i) = 0_E.$$

Par linéarité de p_j, on a donc :

$$p_j(x) = \sum_{i=0}^{n} p_j(x_i) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \underbrace{p_j(x_i)}_{=0_E} + \underbrace{p_j(x_j)}_{=x_j} \boxed{= x_j.}$$

On en déduit que :

$$x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k = p_0(x) + p_1(x) + \cdots + p_k(x),$$

cette égalité étant vraie pour tout $x \in E$. D'où l'égalité annoncée dans l'énoncé :

$$\mathrm{id}_E = p_0 + p_1 + \cdots + p_k$$

5. (a) Soient $0 \leq i, j \leq k$ avec $i \neq j$. On a $\mathrm{Im}(p_j) = E_{\lambda_j} \subset E_{\lambda_i}^{\perp} = \mathrm{Ker}(p_i)$. Pour tout $x \in E$, on a donc :

$$p_i \circ p_j(x) = p_i(\underbrace{p_j(x)}_{\in \mathrm{Ker}(p_i)}) = 0_E.$$

D'où l'égalité $\boxed{p_i \circ p_j = \tilde{0}.}$

(b) Pour tout $x \in E$, on a :

$$x = p_0(x) + p_1(x) + \cdots + p_k(x).$$

Appliquons f à cette égalité. Par linéarité de f, on obtient :

$$f(x) = f(p_0(x)) + f(p_1(x)) + \cdots + f(p_k(x)). \qquad (*)$$

Or pour tout $0 \leq j \leq k$, $p_j(x)$ appartient à $E_{\lambda_j}(f)$, de sorte que :

$$f(p_j(x)) = \lambda_j p_j(x).$$

En particulier pour $j = 0$, on a $f(p_0(x)) = \underbrace{\lambda_0}_{=0} p_0(x) = 0_E$. On obtient donc en substituant dans $(*)$:

$$f(x) = 0_E + \lambda_1 p_1(x) + \cdots + \lambda_k p_k(x) = \lambda_1 p_1(x) + \cdots + \lambda_k p_k(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on a donc l'égalité :

$$\boxed{f = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \cdots + \lambda_k p_k.}$$

(c) Soit p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$. On a montré à la question 3 que $\mathrm{Ker}(f)^{\perp} = \mathrm{Im}(f)$, de sorte que $E = \mathrm{Ker}(f) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(f)$ et que p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$. Proposons deux méthodes pour aboutir.

Méthode 1. p_0 est pour sa part le projecteur orthogonal sur $E_{\lambda_0}(f) = E_0(f) = \mathrm{Ker}(f)$, soit encore (puisque $\mathrm{Ker}(f)^{\perp} = \mathrm{Im}(f)$) le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f)$. Les projecteurs p et p_0 sont donc associés (voir à ce sujet le **Chapitre 6. Applications linéaires.**) et de ce fait satisfont :

$$p + p_0 = \mathrm{id}_E \quad \Rightarrow \quad p = \mathrm{id}_E - p_0 = (p_0 + p_1 + \cdots + p_k) - p_0 \boxed{= p_1 + \cdots + p_k.}$$

Méthode 2. Soit $x \in E$. Il se décompose de manière unique sous la forme :

$$x = x_0 + \underbrace{x_1 + \cdots + x_k}_{=y_0}$$

où $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$ pour tout $0 \leq i \leq k$. Or on a $x_0 \in E_{\lambda_0}(f) = \mathrm{Ker}(f)$ et pour tout $i \neq 0$:

$$f(x_i) = \lambda_i x_i \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\lambda_i \neq 0} \quad x_i = \frac{1}{\lambda_i} f(x_i) = f\left(\frac{1}{\lambda_i} x_i\right) \in \mathrm{Im}(f).$$

Puisque $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E, $y_0 = x_1 + \cdots + x_k$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$. On a donc :

$$x = x_0 + y_0 \quad \text{avec} \quad x_0 \in \mathrm{Ker}(f) \text{ et } y_0 \in \mathrm{Im}(f).$$

Il s'agit ici de la décomposition (unique) de x dans la somme directe $E = \mathrm{Ker}(f) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(f)$. Et puisque p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$, on a donc :

$$p(x) = y_0 = x_1 + \cdots + x_k = p_1(x) + \cdots + p_k(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut donc conclure que :

$$\boxed{p = p_1 + \cdots + p_k.}$$

6. (a) On a (à l'aide du résultat de la question 5.(b)) :

$$\begin{aligned} f \circ f^\sharp &= \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{\lambda_j} p_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda_j} p_i \circ p_j \end{aligned}$$

On a pour tout $1 \leq i, j \leq k$, $p_i \circ p_j = \tilde{0}$ si $i \neq j$ (question 5.(a)) et $p_i \circ p_i = p_i$ (car p_i est un projecteur). D'où finalement :

$$f \circ f^\sharp = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda_i} p_i \circ p_i = \sum_{i=1}^k p_i \boxed{= p.}$$

(b) Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = p(y) &\Leftrightarrow f(x) = f \circ f^\sharp(y) \Leftrightarrow f(x) - f(f^\sharp(y)) = 0_E \\ &\Leftrightarrow f(x - f^\sharp(y)) = 0_E \Leftrightarrow x - f^\sharp(y) \in \mathrm{Ker}(f). \end{aligned}$$

7. (a) Commençons par la remarque suivante. Lorsque z parcourt E, $f(z)$ parcourt $\mathrm{Im}(f)$, de sorte que :

$$\inf_{z \in E} \|f(z) - y\| = \inf_{u \in \mathrm{Im}(f)} \|u - y\|.$$

Il s'agit ici de la distance du vecteur y au sous-espace $\mathrm{Im}(f)$. Par le cours sur les projecteurs orthogonaux, on sait que cette distance est réalisée par un unique vecteur de $\mathrm{Im}(f)$ qui n'est autre que le projeté orthogonal de y sur $\mathrm{Im}(f)$, soit $p(y)$.

Pour tout $x \in E$, on a donc :

$$\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\| \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = p(y) \quad \overset{7.(a)}{\Leftrightarrow} x - f^\sharp(y) \in \mathrm{Ker}(f).$$

(b) Soit $x \in E$ satisfaisant :

$$\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\|. \tag{$*$}$$

D'après la question précédente, ceci est équivalent à :

$$x - f^\sharp(y) \in \mathrm{Ker}(f).$$

Et on a :

$$f^\sharp(y) = \frac{1}{\lambda_1} \underbrace{p_1(y)}_{\in E_{\lambda_1(f)} \subset \mathrm{Im}(f)} + \cdots + \frac{1}{\lambda_k} \underbrace{p_k(y)}_{\in E_{\lambda_k(f)} \subset \mathrm{Im}(f)} \in \mathrm{Im}(f)$$

Puisque $\mathrm{Im}(f) \perp \mathrm{Ker}(f)$, les vecteurs $x - f^\sharp(y)$ et $f^\sharp(y)$ sont orthogonaux, d'où par Pythagore :

$$\|x\|^2 = \| \underbrace{x - f^\sharp(y)}_{\in \mathrm{Ker}(f)} + \underbrace{f^\sharp(y)}_{\in \mathrm{Im}(f)} \|^2 = \|x - f^\sharp(y)\|^2 + \|f^\sharp(y)\|^2 \geq \|f^\sharp(y)\|^2.$$

On a donc que $\|x\| \geq \|f^\sharp(y)\|$, avec égalité si et seulement si :

$$\|x - f^\sharp(y)\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = f^\sharp(y),$$

pour qui on a bien $x - f^\sharp(y) = 0_E \in \mathrm{Ker}(f)$, ce qui équivaut d'après la question 7.(a) à $(*)$.

Ainsi, $\boxed{f^\sharp(y) \text{ est bien le vecteur } x \text{ de } E \text{ de plus petite norme vérifiant } (*).}$

Remarque. On a montré entre autre les résultats suivants dans cette partie :

- $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$;
- $f \circ f^\sharp = p$ où p est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$.
- pour tout $y \in E$, $f^\sharp(y)$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$.

Le dernier point nous assure que le sous-espace $\mathrm{Im}(f)$ est stable par $f^\sharp$. Notons $g^\sharp$ l'endomorphisme induit par $f^\sharp$ sur ce sous-espace. De même, $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f, et on peut considérer g l'endomorphisme induit par f sur ce sous-espace. On a alors pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$:

$$g \circ g^\sharp(y) = f \circ f^\sharp(y) = p(y) = y$$

puisque p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(f)$. Ainsi on a $g \circ g^\sharp = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}(f)}$. Comme g et $g^\sharp$ sont des endomorphismes de $\mathrm{Im}(f)$ qui est de dimension finie, g et $g^\sharp$ sont donc des isomorphismes de $\mathrm{Im}(f)$ et on a :

$$g^{-1} = g^\sharp.$$

Ceci justifie la dénomination « inverse généralisé de f » pour $f^\sharp$.

Partie II : Application à un exemple

8. Puisque A est symétrique et $\mathscr{B}$ est une base orthonormée, $\boxed{f \text{ est bien un endomorphisme symétrique.}}$

   Comme $A \neq 0_4$, $\boxed{f \text{ n'est pas l'endomorphisme nul.}}$

   Notons enfin que la deuxième et la quatrième colonne de A sont proportionnelles, de sorte que $\mathrm{rg}(A) \leq 3 < 4$. Ainsi A n'est pas inversible, et $\boxed{f \text{ n'est pas bijective.}}$

9. Comme A n'est pas inversible, 0 est valeur propre de A et on a $\dim(E_0(A)) \geq 1$. Notons également que :

$$A - 2I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   qui est de rang $2 < 4$. Donc 2 est valeur propre et $\dim(E_2(A)) = 4 - 2 = 2$ par le théorème du rang.

   Il nous reste potentiellement une dernière valeur propre à trouver (éventuellement nulle). A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable, semblable à une matrice $D = \mathrm{diag}(0, 2, 2, \lambda)$ où λ est sa dernière valeur propre. En prenant la trace, on a alors :

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(D) \quad \Rightarrow \quad 4 + \lambda = 8 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 4.$$

   Ainsi, $\boxed{\text{on a } \mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A) = \{0, 2, 4\}.}$

10. D'après la question 5.(b), en notant $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 4$, on a $f = 2p_1 + 4p_2$, ce qui se traduit matriciellement par l'égalité :

$$\boxed{A = 2M_1 + 4M_2.}$$

11. (a) Puisque $\sum_{i=0}^{2} \dim(E_{\lambda_i}(f)) = 4$, et que $\dim(E_2(f)) = 2$ et $\dim(E_0(f)) \geq 1$, on a nécessairement $\boxed{\dim(E_4(f)) = 1.}$

$$A - 4I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, on a :

$$X \in \mathrm{Ker}(A - 4I_4) \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ -3y - t = 0 \\ -y - 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, on a $\mathrm{Ker}(A - 4I_4) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \\ 0 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.
Par traduction vectorielle, on en déduit que $e_1 - e_3$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre 4, de norme $\sqrt{2}$:

$$\|e_1 - e_3\|^2 = \|e_1\|^2 + \| - e_3\|^2 = 1 + 1 = 2$$

par Pythagore, car e_1 et e_3 sont orthogonaux. Ainsi $\boxed{v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)}$ est un vecteur unitaire de $E_{\lambda_2}(f)$.

(b) Nous venons de montrer que (v_2) est une base orthonormée de $E_{\lambda_2}(f)$. Le cours sur les projecteurs orthogonaux nous donne alors l'expression suivante de p_2 projecteur orthogonal sur $E_{\lambda_2}(f)$:

$$\boxed{\forall x \in E, \quad p_2(x) = \langle x, v_2 \rangle v_2.}$$

(c) On a $p_2(e_1) = \langle e_1, v_2 \rangle v_2 = \dfrac{e_1 - e_3}{2}$, $p_2(e_3) = \langle e_3, v_2 \rangle v_2 = \dfrac{e_3 - e_1}{2}$ et $p_2(e_2) = p_2(e_4) = 0_E$.
On obtient donc :

$$\boxed{M_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_2(e_1) & p_2(e_2) & p_2(e_3) & p_2(e_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}}.$$

12. On a donc $M_1 = \dfrac{1}{2}(A - 4M_2)$, et par conséquent :

$$M_{\mathscr{B}}(f^\sharp) = \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{4}M_2 = \frac{1}{4}A - \frac{3}{4}M_2 \boxed{= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$