DS8

Concours blanc 2 type EM Lyon du 23/01/2020

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Problème 1

Partie I : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série

On s'intéresse dans cette partie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

   (a) Montrer que les suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée $S(x)$.

   (b) En déduire : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - S(x)| \leqslant \varepsilon$.

   (c) Justifier alors que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge et que l'on a : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

   (d) Justifier : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\quad u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}$.

   (e) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad |S(x) - u_n| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^x}$.

   On pourra séparer les cas n pair et n impair.

   (f) En déduire une fonction `Scilab` qui, étant donnés deux réels $x > 0$ et $\varepsilon > 0$, renvoie une valeur approchée de $S(x)$ à ε près.

3. Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^x} \quad \text{puis :} \quad \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p}\frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^x}.$$

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant la question **3.** : $\quad v_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

   (b) En déduire la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis la valeur de $S(1)$.

5. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $S(2)$.

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $]0;+\infty[$ par : $\quad \forall x \in]0;+\infty[,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

On rappelle également l'égalité suivante : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > -1$.

   On pose, pour tout réel x de $]-1;+\infty[$, $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t}\mathrm{d}t$.

7. Soit $x \in]-1;+\infty[$. On définit la fonction $g_x :]0;+\infty[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{t^x}{1+e^t}$.

   (a) Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ g_x(t) = (-1)^n g_x(t) e^{-nt} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} t^x e^{-kt}$.

   (b) Justifier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt}\mathrm{d}t$ converge et que l'on a :
   $$\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt}\mathrm{d}t = \frac{1}{k^{x+1}}\Gamma(x+1).$$

   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}\mathrm{d}t$ converge, puis que la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}\mathrm{d}t$, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, est égale à 0.

   (d) En déduire la relation : $\quad I(x) = S(x+1)\Gamma(x+1)$,
   où la fonction S a été définie dans la partie **I**.

8. En utilisant la partie **I.**, déterminer la valeur de $I(1)$.

Partie III : Étude d'une variable aléatoire

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}$.

9. Vérifier que la fonction f est paire.

10. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

    On considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

11. Déterminer la fonction de répartition de X.

12. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)\mathrm{d}t$ converge.
    En déduire que X admet un moment d'ordre n, que l'on note $m_n(X)$.

    (b) Justifier que : $\quad \forall p \in \mathbb{N},\ m_{2p+1}(X) = 0$.

    (c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer : $\quad \forall p \in \mathbb{N}^*,\ m_{2p}(X) = 4p\, I(2p-1)$.

13. En déduire l'existence et la valeur de l'espérance et de la variance de X.

14. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes et de même densité f.
    On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad Y_n = \max(X_1, ..., X_n) \quad$ et $\quad Z_n = Y_n - \ln(n)$.

    (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, déterminer la fonction de répartition de Y_n puis la fonction de répartition de Z_n.

    (b) En déduire que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera une densité .

Problème 2
Définitions et notations.

- p désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
- On note $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à cœfficients complexes, $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices-lignes à p colonnes à cœfficients réels, $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à cœfficients réels, I_p la matrice diagonale de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ et de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les cœfficients diagonaux sont égaux à 1.
- On note, pour toute matrice carrée A d'ordre p et tout $(i,j) \in \{1,\dots,p\}^2$, $(A)_{i,j}$ le cœfficient de A situé à la ligne i et à la colonne j.
- On note, pour tout matrice-ligne L de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ et tout $j \in \{1,\dots,p\}$, $(L)_j$ le cœfficient de L situé à la colonne j.
- On dit qu'une suite de matrices $(A_n)_{n\geq 1}$ de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice A de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, et on note $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$, si et seulement si : $\forall (i,j) \in \{1,\dots,p\}^2,\ (A_n)_{i,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (A)_{i,j}$.
- On dit qu'une suite de matrices $(L_n)_{n\geq 1}$ de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ converge vers une matrice L de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{R})$, et on note $L_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$, si et seulement si : $\forall j \in \{1,\dots,p\},\ (L_n)_j \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (L)_j$.
- On admet que, si la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice A et si la suite de matrice $(B_n)_{n\geq 1}$ de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice B, alors la suite $(A_nB_n)_{n\geq 1}$ converge vers la matrice AB.
- On admet que si la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice A et si L est une matrice-ligne de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{R})$, alors la suite $(LA_n)_{\geq 1}$ de matrices converge vers LA.
- On appelle matrice stochastique toute matrice A de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ telle que : $\begin{cases} \forall (i,j) \in \{1,\dots,p\}^2,\ (A)_{i,j} \geq 0 \\ \forall i \in \{1,\dots,p\},\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j} = 1, \end{cases}$

  et on note $\mathcal{ST}_p$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

Partie I : Résultats généraux sur les matrices stochastiques - Illustrations

1. (a) On note V la matrice-colonne à p lignes dont tous les cœfficients sont égaux à 1.
   Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$: $A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in \{1,\dots,p\}^2,\ (A)_{i,j} \geq 0 \\ AV = V. \end{cases}$

   (b) En déduire que toutes les matrices de $\mathcal{ST}_p$ ont une valeur propre commune.

2. Démontrer : $\forall A, B \in \mathcal{ST}_p$, $AB \in \mathcal{ST}_p$.

3. On note : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier, sans calcul, que A_1 est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   Donner la dimension du sous-espace propre pour A_1 associé à la valeur propre 1.

   (b) En utilisant éventuellement les matrices A_2 et A_3 :

   i. Montrer qu'il existe dans $\mathcal{ST}_3$ au moins un élément non diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

   ii. Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : "Pour tout élément A de $\mathcal{ST}_3$, le sous-espace propre pour A associé à la valeur propre 1 est de dimension 1".

4. Soit $A \in \mathcal{ST}_p$ et λ une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.
   On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour A associé à la valeur propre λ.
   On note i un élément de $\{1,\dots,p\}$ tel que : $\forall k \in \{1,\dots,p\}$, $|x_k| \leq |x_i|$.

   (a) Montrer : $|\lambda x_i| \leq |x_i|$.

   (b) En déduire : $|\lambda| \leq 1$.

Partie II : Suites de moyennes de puissances de matrices stochastiques

Soit $A \in \mathcal{ST}_p$. On note $A^0 = I_p$.

1. (a) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n \in \mathcal{ST}_p$.

   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p$.

Dans la suite de cette partie II., on suppose qu'il existe $r \in \{1, \ldots, p-1\}$, $P \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ inversible, $D \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont tous les cœfficients diagonaux $(D)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leq r$ et distincts de 1 si $i \geq r+1$, tels que : $A = PDP^{-1}$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} D^k$ et $B_n = PM_nP^{-1}$.

On note Δ la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont les cœfficients diagonaux $(\Delta)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leq r$ et nuls sinon, et on note $B = P\Delta P^{-1}$.

2. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé tel que $|x| \leq 1$: $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$

3. Montrer : $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Delta$, et en déduire : $B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} B$.

4. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n \in \mathcal{ST}_p$.

   (b) En déduire : $B \in \mathcal{ST}_p$.

Partie III : Aspect probabiliste

On dispose d'un objet noté T et de trois urnes numérotées $1, 2$ et 3.
A chaque instant n ($n \in \mathbb{N}$), T est dans une des trois urnes et une seule.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire égale au numéro de l'urne dans laquelle se trouve l'objet à l'instant n et L_n la matrice suivante de $\mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$: $L_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.
On suppose connues la loi de X_0 et la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2,\ (A)_{i,j} = P_{(X_0 = i)}(X_1 = j).$$

On suppose : $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$, $P_{(X_n = i)}(X_{n+1} = j) = P_{(X_0 = i)}(X_1 = j)$.

1. Montrer : $A \in \mathcal{ST}_3$.

2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} = L_nA$ puis : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = L_0A^n$.

   On suppose dorénavant $A = A_1$, définie dans la partie I.3, et on note $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer une matrice $P_1 \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et à cœfficients diagonaux tous égaux à 1, telle que $A_1 = P_1D_1P_1^{-1}$ et calculer P_1^{-1}.

4. Déterminer la limite de la suite $(D_1^n)_{n\geq 1}$, puis la limite de la suite $(A_1^n)_{n\geq 1}$.

5. Déterminer la limite de la suite $(L_n)_{n\geq 1}$. Expliquer ce résultat par des arguments probabilistes.