DS9

Correction du devoir surveillé

Exercice 1 (Edhec 2013)

1. Montrons que f est une densité de probabilité.

   - f est positive sur $\mathbb{R}$.
   - f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
   - f est paire, et pour tout $A \in [1, +\infty[$, on a :

   $$\int_0^A f(t)\mathrm{d}t = \int_1^A \frac{1}{2x^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{2x}\right]_1^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2A} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

   Comme f est paire, on en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $2\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

   $\boxed{f \text{ est donc bien une densité de probabilité.}}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $F(x) = P(X_1 \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$. On a alors trois cas à considérer :

   - si $x \leq -1$, on a :
   $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2t}\right]_{-\infty}^{x} = -\frac{1}{2x}.$$
   - si $-1 \leq x \leq 1$, on a (par relation de Chasles) :
   $$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2t^2}\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} 0\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$
   - si $x \geq 1$, on a (toujours par relation de Chasles) :
   $$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2t^2}\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} 0\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} \frac{1}{2t^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} + 0 + \left[-\frac{1}{2t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{2x} \end{aligned}$$

   Finalement on obtient pour fonction de répartition $\boxed{F : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} -\dfrac{1}{2x} & \text{si } x \leq -1 \\ 1/2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

   $$\begin{aligned} G_n(x) = P(Y_n \leq x) = P(S_n \leq nx) &= P\left(\bigcap_{1 \leq k \leq n} [X_k \leq nx]\right) \\ &\underset{X_k \text{ indép.}}{=} \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq nx) \underset{\text{même loi}}{=} F(nx)^n \end{aligned}$$

   On obtient donc que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n a pour fonction de répartition :

   $$\boxed{G_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \left(-\dfrac{1}{2nx}\right)^n & \text{si } nx \leq -1 \\ \frac{1}{2^n} & \text{si } -1 \leq nx \leq 1 \\ \left(1 - \dfrac{1}{2nx}\right)^n & \text{si } nx \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \left(-\dfrac{1}{2nx}\right)^n & \text{si } x \leq -\dfrac{1}{n} \\ \frac{1}{2^n} & \text{si } -\dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ \left(1 - \dfrac{1}{2nx}\right)^n & \text{si } x \geq \dfrac{1}{n} \end{cases}}$$

4. (a) Soit $x \leq 0$. Puisque G_n est une fonction de répartition, elle est en particulier croissante, de sorte que :

$$\boxed{G_n(x) \leq G_n(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

D'où le résultat.

(b) Soit $x > 0$. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, il existe (par définition de la limite d'une suite avec $\varepsilon = x$) un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $x \geq \frac{1}{n}$.

On peut même expliciter un tel entier n_0 : il suffit de le choisir tel que $n_0 \geq \frac{1}{x}$. On peut prendre par exemple $n_0 = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1$. On a alors bien que pour tout $n \geq n_0 \geq \frac{1}{x} > 0$, on a $x \geq \frac{1}{n}$.

Pour tout $n \geq n_0$, on a ainsi $x \geq \frac{1}{n}$, et donc :

$$\boxed{G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{2nx}\right)^n.}$$

D'où le résultat demandé.

5. (a) On a deux cas à considérer :

- Si $x \leq 0$, alors on a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq G_n(x) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, on en déduit par théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x)$ existe et vaut 0.

- Si $x > 0$, alors on a vu qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{2nx}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{2nx}\right)\right).$$

On a $n \ln\left(1 - \frac{1}{2nx}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{n}{2nx} = -\frac{1}{2x}$, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{2nx}\right) = -\frac{1}{2x}$. Par composition de la **limite** par l'exponentielle (qui est continue), on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} G_n(x) = e^{-\frac{1}{2x}}.$$

Mise en garde.

Attention à ne pas dire, ou ne serait ce que laisser entendre ou imaginer, que vous composez des équivalents par la fonction exponentielle, ce qui on le sait est faux en général !

On obtient donc que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{2x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

(b) Notons qu'on ne sait rien sur la fonction G : on ne sait pas si cette fonction est une fonction de répartition d'une variable, et encore moins si la variable qui lui correspondrait est à densité. On a donc les cinq points du chapitre 10a à vérifier. On vérifie donc que la fonction G ainsi obtenue est :

- continue sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0]$ comme composée de fonctions continues, et elle est continue en 0 car :
$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{2x}} = 0 = G(0).$$
- de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$ comme composées de fonctions qui le sont, et on a :
$$G'(x) = 0 \text{ si } x < 0 \quad \text{ et } \quad G'(x) = \frac{1}{2x^2}e^{-\frac{1}{2x}} \text{ si } x > 0.$$
- En particulier $G'(x) \geq 0$ pour $x \neq 0$, et G est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Enfin $\lim\limits_{x\to -\infty} G(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} G(x) = 1$.

Donc G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité Y.

(c) On a donc montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G_n(x)$ converge vers $G(x)$ quand $n \to +\infty$. Par définition de la convergence en loi, on peut donc conclure que (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire Y dont la fonction de répartition est G.

6. Considérons la variable aléatoire $Z = \dfrac{1}{Y}$, et F_Z sa fonction de répartition. On a pour tout $x \leq 0$,
$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P\left(\frac{1}{Y} \leq x\right) = 0.$$
En effet, $\left[\frac{1}{Y} \leq x\right] \subset [Y \leq 0]$ et $P(Y \leq 0) = 0$.

Supposons maintenant $x > 0$. On a :
$$F_Z(x) = P(\frac{1}{Y} \leq x) = P(Y \geq \frac{1}{x}) = 1 - P(Y < \frac{1}{x}) \underset{Y \text{ cont.}}{=} 1 - P(Y \leq \frac{1}{x}) = 1 - \exp(-\frac{1}{2}x).$$
Ainsi F_Z est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $1/2$, et $\dfrac{1}{Y} \hookrightarrow \mathscr{E}(1/2)$.

Exercice 2 (Edhec 2009)

1. Soit $P \in E$, $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} a_k X^k = a_{2n+1}X^{2n+1} + a_{2n}X^{2n} + \cdots + a_1 X + a_0$. Alors on a :
$$f(P) = X^{2n+1}P\left(\frac{1}{X}\right) = X^{2n+1}\left(a_{2n+1}\left(\frac{1}{X}\right)^{2n+1} + a_{2n}\left(\frac{1}{X}\right)^{2n} + \cdots + a_1\left(\frac{1}{X}\right) + a_0\right)$$
$$= a_{2n+1} + a_{2n}X^1 + \cdots + a_1 X^{2n} + a_0 X^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^{2n+1-k}$$
Ainsi $f(P)$ appartient bien à E.

Pour tout $P, Q \in E$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= X^{2n+1}\left((\lambda P + \mu Q)\left(\frac{1}{X}\right)\right) \\ &= X^{2n+1}\left(\lambda P\left(\frac{1}{X}\right) + \mu Q\left(\frac{1}{X}\right)\right) \\ &= \lambda X^{2n+1} P\left(\frac{1}{X}\right) + \mu X^{2n+1} Q\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

Ainsi f est un endomorphisme de E.

2. (a) On a pour tout $P \in E$:

$$\begin{aligned} f \circ f(P) = f(f(P)) &= f\left(X^{2n+1} P\left(\frac{1}{X}\right)\right) \\ &= X^{2n+1}\left(\frac{1}{X^{2n+1}} P\left(X\right)\right) = P(X) \end{aligned}$$

On a donc bien $f \circ f = Id$.

(b) D'après la question précédente, $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de f. Les valeurs propres **possibles** de f se trouvent parmi les racines de $X^2 - 1$. Ainsi, les deux valeurs propres possibles de f sont 1 et -1.

3. Soit $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ un polynôme quelconque de $Ker(f - Id)$.

(a) On a $f(P) = P$, soit encore :

$$\sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^{2n+1-k} = \sum_{j=0}^{2n+1} a_{2n+1-j} X^j$$

Puisque la famille $(1, X, \ldots, X^{2n+1})$ est libre, on en déduit que :

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ a_k = a_{2n+1-k}.$$

(b) On obtient donc :

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k X^k \\ &\overset{3.(a)}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_{2n+1-k} X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{j=0}^{n} a_j X^{2n+1-j} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(X^k + X^{2n+1-j}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que $\left(X^k + X^{2n+1-j}\right)_{k=0,\ldots,n}$ est une famille génératrice de $Ker(f - Id)$. Comme c'est de plus une famille libre car échelonnée en degrés, on conclut que c'est une base de $Ker(f - Id)$.

4. Soit de même $P \in Ker(f + Id)$. On a :

$$\sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k = -\sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^{2n+1-k} = -\sum_{j=0}^{2n+1} a_{2n+1-j} X^j$$

Puisque la famille $(1, X, \dots, X^{2n+1})$ est libre, on en déduit que :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\},\ a_k = -a_{2n+1-k}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
P(X) &= \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k X^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} (-a_{2n+1-k}) X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{j=0}^{n} a_j (-X^{2n+1-j}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(X^k - X^{2n+1-k}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\left(X^k - X^{2n+1-k}\right)_{k=0,\dots,n}$ est une famille génératrice de $Ker(f + Id)$, et libre car échelonnée en degrés. C'est donc une base de $Ker(f + Id)$.

5. (a) Montrons que φ est un produit scalaire sur E :

- Bilinéarité. Soient $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{2n+1} b_k X^k$ et $R = \sum_{k=0}^{2n+1} c_k X^k$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a $\lambda P + \mu Q = \sum_{k=0}^{2n+1} (\lambda a_k + \mu b_k) X^k$. On obtient :

$$\varphi(\lambda P + \mu Q, R) = \sum_{k=0}^{2n+1} (\lambda a_k + \mu b_k) c_k = \lambda \sum_{k=0}^{2n+1} a_k c_k + \mu \sum_{k=0}^{2n+1} b_k c_k = \lambda \varphi(P, R) + \mu \varphi(Q, R)$$

- Symétrie : Soient $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{2n+1} b_k X^k$. On a :

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k b_k = \sum_{k=0}^{2n+1} b_k a_k = \varphi(Q, P).$$

- positivité : Soit $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$. On a :

$$\varphi(P, P) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k^2 \geq 0.$$

- définie positive : Soit $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$. On a :

$$\varphi(P, P) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k^2 = 0.$$

  Comme tous les termes de cette somme sont positifs, et que cette somme vaut 0, on en déduit que :

$$\forall k = 0, \dots, 2n+1, \quad a_k^2 = 0, \text{ soit encore } a_k = 0.$$

  On en déduit donc que $P = 0$.

Donc φ est un produit scalaire.

(b) Soient $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{2n+1} b_k X^k$. On a $f(P) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k} X^k$ et $f(Q) = \sum_{k=0}^{2n+1} b_{2n+1-k} X^k$. On a alors :

$$\begin{aligned}\langle f(P), Q\rangle &= \sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k} b_k \\ &= \sum_{j=0}^{2n+1} a_j b_{2n+1-j} = \langle P, f(Q)\rangle\end{aligned}$$

Ainsi f est un endomorphisme symétrique.

(c) On a vu que f admettait deux valeurs propres 1 et -1 et on a déterminé une base des sous-espaces propres $Ker(f - Id)$ et $Ker(f + Id)$. En particulier on a montré que :

$$\dim(Ker(f - Id) = n + 1, \ \dim(Ker(f + Id) = n + 1,$$

donc $\dim(Ker(f - Id) + \dim(Ker(f + Id) = 2n + 2 = \dim(E)$. On a donc :

$$E = Ker(f - Id) \oplus Ker(f + Id).$$

De plus f est symétrique, donc ces sous-espaces propres sont orthogonaux.
Finalement, $Ker(f - Id)$ et $Ker(f + Id)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Exercice 3 (Edhec 2007)

1. Les X_i sont indépendants et suivent tous une loi $\mathscr{E}(1) = \gamma(1)$. Par stabilité de la loi gamma par somme, on a $\boxed{S_n \hookrightarrow \gamma(n)}$. On en déduit que :

$$\boxed{E(S_n) = n} \quad \text{et} \quad \boxed{V(S_n) = n}.$$

2. Les variables X_i sont indépendantes et identiquement distribuées. Elles admettent toutes une espérance (qui vaut 1) et une variance (qui vaut 1 également). Par le théorème central limite, on sait que :

$$S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{L}} S \hookrightarrow \mathscr{N}(0, 1).$$

On en déduit en particulier que :

$$P(S_n \leq n) = P(S_n - n \leq 0) = P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P(X \leq 0) = \Phi(0) \boxed{= \frac{1}{2}}$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi $\mathscr{N}(0, 1)$.

3. Comme S_n suit une loi $\gamma(n)$, une densité de S_n est donnée par :

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

Pour tout $n \geq 1$, on a donc :

$$P(S_n \leq n) = \int_{-\infty}^{n} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Avec la question précédente, on peut donc conclure que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.}$$

4. (a) Les bornes de l'intégrale ainsi que le terme dans l'exponentielle nous incite à faire le changement de variables $t = nz$. Ce changement de variable est affine, donc licite, et on a :

$$\mathrm{d}t = n\mathrm{d}z, \quad z : 0 \to 1 \quad \text{lorsque} \quad t : 0 \to n.$$

Par le théorème de changement de variables, les intégrales $\displaystyle\int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{(nz)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-nz}n\mathrm{d}z$ sont de même nature, c'est-à-dire convergente car la première converge, et on a :

$$\int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{n^n}{(n-1)!}\int_0^1 z^{n-1}e^{-nz}\mathrm{d}z.$$

Par la question précédente, on a :

$$\frac{n^n}{(n-1)!}\int_0^1 z^{n-1}e^{-nz}\mathrm{d}z = \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}.$$

On en déduit par opération sur les équivalents (quotient en l'occurrence) que :

$$\boxed{\int_0^1 z^{n-1}e^{-nz}\mathrm{d}z \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(n-1)!}{2n^n} = \frac{n!}{2n^{n+1}}.}$$

(b) En utilisant que $n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$, on obtient :

$$\frac{n!}{2n^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}{2n^{n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}e^{-n}.$$

On obtient donc le nouvel équivalent suivant :

$$\boxed{\int_0^1 z^{n-1}e^{-nz}\,\mathrm{d}z \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}e^{-n}.}$$

Problème (Edhec 2018)

Partie I : simulations de S_k et T_k.

1. Étant donné la structure du programme (tant que $c < k$, $n = n+1$), on observe que n correspond au nombre de lancers de la pièce, et que c représente le nombre de piles obtenus lors de ces n lancers. On choisit d'augmenter c de 1 lorsqu'on obtient un pile, ce qui survient avec une probabilité p. On peut simuler cet évènement (n-ième lancer d'une pièce) à l'aide de l'instruction `rand()<p`. En effet `rand()` renvoie une réalisation d'une variable suivant une loi $\mathscr{U}([0,1])$. Cette réalisation est donc $< p$ avec une probabilité p, ce qui correspond à la probabilité d'obtenir un pile au n-ième lancer.

   Le « tant que » s'arrête alors lorsque le compteur c est égal à k, c'est à dire lorsqu'on a obtenu les k piles. On doit alors renvoyer la valeur prise par S_n : il s'agit du nombre de lancers nécessaires pour obtenir les k piles, c'est à dire n.

   On obtient donc le code suivant :

```
k = input('donnez une valeur pour k :')
p = input('donnez une valeur pour p :')
n = 0
c = 0
while c<k
    n=n+1
    if rand()<p then c = c+1
    end
end
disp(n)
```

2. De même, n représente le nombre de lancers. Mais ici, la variable c doit contenir le nombre de piles **consécutifs**, et on s'arrête lorsqu'on a obtenu k piles consécutifs, c'est à dire lorsque $c = k$, pour renvoyer n encore. On doit donc augmenter c de 1 lorsqu'on obtient un pile, ce qu'on simulera encore par `rand()<p`. Si par contre on obtient face, ce qui correspondra au cas où `rand()<p` n'est pas réalisée, alors on remet le compteur c à 0. On obtient donc le code suivant :

```
    if rand()<p then c = c+1, else c=0
```

Partie 2 : calcul de l'espérance S_k.

3. S_1 correspond au rang du premier pile dans une succession de lancers. C'est donc le rang du premier succès (« obtenir pile »), avec probabilité de succès p, dans une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Ainsi S_1 suit une loi $\mathscr{G}(p)$. En particulier $E(S_1)$ existe et vaut $E(S_1) = \dfrac{1}{p}$.

4. (a) Puisque X_{n-1} est égale au nombre de piles obtenus lors des $n-1$ premiers lancers, il s'agit du nombre de succès lors de $n-1$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes avec probabilité de succès p. Donc X_{n-1} suit une loi $\mathscr{B}(n-1, p)$.

   (b) S_k est le rang d'apparition du k-ème pile. Pour cela, on doit donc avoir lancer au moins k fois la pièce. Ainsi $S_k \geq k$. De plus pour tout $n \geq k$, l'évènement $[S_k = n]$ est bien réalisable puisqu'on peut obtenir $n-k$ « faces » suivis de k « piles ». Ainsi on a $S_k(\Omega) = [\![k, +\infty[\![= \{n \in \mathbb{N},\ n \geq k\}$.

   L'évènement $[S_k = n]$ est réalisé si et seulement si on obtient le k-ème « pile » au n-ème lancer, soit si et seulement si on a obtenu $k-1$ « pile » parmi des $n-1$ premiers lancers et pile lors du n-ème lancer. Ainsi on a :

$$[S_k = n] = [X_{n-1} = k-1] \bigcap P_n.$$

   (c) Les évènements $[X_{n-1} = k-1]$ et P_n étant indépendants, puisque les lancers le sont, on a :

$$P(S_k = n) = P([X_{n-1} = k-1] \bigcap P_n) = P(X_{n-1} = k-1)P(P_n) = \left(\binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}\right) p$$

   car $X_{n-1} \hookrightarrow \mathscr{B}(n-1, p)$. On obtient donc que :

$$\forall n \geq k,\ P(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.$$

5. (a) Z_i représente le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du i-ème « pile » après l'obtention du $i-1$-ème « pile ». Il s'agit donc du nombre de lancers nécessaires à l'obtention d'un pile. Les lancers étant indépendants, Z_i suit donc une loi $\mathscr{G}(p)$.

   Cette justification conviendrait très bien lors du concours. En détails, au cas où l'argument précédent ne vous convainc pas totalement, on peut aussi le retrouver par le calcul suivant : on applique la formule des probabilités totales au système complet d'évènements

$([S_{i-1}=n])_{n=i-1,i,\dots}$. On obtient pour tout $k\geq 1$:

$$\begin{aligned}
P(Z_i=k) &= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P(Z_i=k,\ S_{i-1}=n)\\
&= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P(S_i=k+n,\ S_{i-1}=n)\\
&= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P([S_{i-1}=n]\cap F_{n+1}\cap\dots\cap F_{n+k-1}\cap P_{n+k})\\
&= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P(S_{i-1}=n)P(F_{n+1})\dots P(F_{n+k-1})P(P_{n+k}) \quad \text{par indépendance des lancers}\\
&= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P(S_{i-1}=n)(1-p)^{k-1}p\\
&= (1-p)^{k-1}p\sum_{n=i-1}^{+\infty} P(S_{i-1}=n) = (1-p)^{k-1}p
\end{aligned}$$

On retrouve bien que $Z_i \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

(b) On a :

$$S_k = (S_k-S_{k-1})+(S_{k-1}-S_{k-2})+\dots+(S_2-S_1)+S_1 = Z_k+Z_{k-1}+\dots+S_2+S_1.$$

(c) Puisque pour tout $1\leq i\leq k$, Z_i possède une espérance qui vaut $\frac{1}{p}$, on en déduit par linéarité de l'espérance que $E(S_k)$ existe aussi et vaut :

$$E(S_k) = \sum_{i=1}^{k} E(Z_k) = \frac{k}{p}.$$

6. (a) Les Z_i admettent toutes une même espérance $\dfrac{1}{p}$ et une même variance. De plus elles sont indépendantes (admis dans l'énoncé). Par la loi faible des grands nombres, on peut donc conclure que $\overline{Z_k}$ converge en probabilité vers $\dfrac{1}{p}$.

(b) Prenons $f : x\in\mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{1}{x}$. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a $\dfrac{1}{p}\in\mathbb{R}_+^*$. Par la propriété admise dans l'énoncé (qui généralise l'une des propriétés du cours), on obtient que $\dfrac{1}{\overline{Z_k}} = \dfrac{k}{S_k} \overset{P}{\to} p$.
$\dfrac{k}{S_k}$ est donc un estimateur convergent de p.

(c) Puisque $\{[S_{k-1}=j],\ j\geq k-1\}$ est un SCE, on a $\displaystyle\sum_{j=k-1}^{+\infty} P(S_{k-1}=j)$ converge et vaut 1.

Par le théorème de transfert, la variable aléatoire $\dfrac{k-1}{S_k-1}$ admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{j\in S_k(\Omega)} \frac{k-1}{j-1}P(S_k=j) = \sum_{j\geq k}\frac{k-1}{j-1}\binom{j-1}{k-1}p^kq^{j-k}$ converge absolument. Puisque cette série est à termes positifs, on étudie sa convergence. On a (en utilisant la formule de Pascal et le fait que $k\geq 2$) :

$$\begin{aligned}
\frac{k-1}{j-1}\binom{j-1}{k-1}p^kq^{j-k} = \binom{j-2}{k-2}p^kq^{j-k} &= p\binom{j-2}{k-2}p^{k-1}q^{(j-1)-(k-1)}\\
&= pP(S_{k-1}=j-1)
\end{aligned}$$

Il s'agit du terme général d'une série convergente, donc $\dfrac{k-1}{S_k-1}$ admet bien une espérance et on a :

$$E\left(\frac{k-1}{S_k-1}\right) = p\sum_{j=k}^{+\infty} P(S_{k-1}=j-1) = p\sum_{j=k-1}^{+\infty} P(S_{k-1}=j) = p.$$

D'où le résultat souhaité.

(d) On a :

$$\begin{aligned} E\left(\frac{k}{S_k}\right) - p &= E\left(\frac{k}{S_k}\right) - E\left(\frac{k-1}{S_k-1}\right) = E\left(\frac{k(S_k-1)-(k-1)S_k}{S_k(S_k-1)}\right) \\ &= E\left(\frac{S_k-k}{S_k(S_k-1)}\right) \end{aligned}$$

Or on a $S_k \geq k$, donc $T_k = \dfrac{S_k-k}{S_k(S_k-1)} \geq 0$. De plus par le calcul précédent, T_k admet une espérance, et par le théorème de transfert :

$$E(T_k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n-k}{n(n-1)} P(S_k=n) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{n-k}{n(n-1)} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} > 0.$$

Ainsi le biais de $\dfrac{k}{S_k}$ comme estimateur de p est strictement positif, et $\dfrac{k}{S_k}$ est un estimateur biaisé de p.

Partie 3 : calcul de l'espérance de T_k.

7. S_1 désigne le rang d'apparition du premier « pile », alors que T_1 désigne le dernier « pile » de la première série de 1 « pile ». Ainsi on a $S_1 = T_1$.

8. (a) Pour tout $1 \leq j \leq k$, on a :

$$P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_{j-1} \cap F_j = [W=j]$$

et

$$P_1 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap P_k = [W \geq k+1].$$

Or $\{[W=j],\ 1 \leq j \leq k\} \cup \{[W \geq k+1]\}$ est un système complet d'évènements puisque $W(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (W suit une loi $\mathscr{G}(1-p)$).

(b) Rappelons que T_k est le rang d'apparition du dernier pile de la première série de k piles consécutifs. Supposons qu'on a fait « face » au premier lancer. Ce lancer ne contribue pas à une série de « pile ». Ainsi pour obtenir pour la première fois une série de k « pile » consécutifs au n-ème lancer, il faudra donc obtenir cette série pour la première fois au bout de $n-1$ lancers (entre le deuxième lancer et le n-ème lancer). Or la probabilité d'obtenir k « pile » consécutifs pour la première fois au $(n-1)$-ème lancer est précisément $P(T_k = n-1)$. On a donc :

$$\forall n \geq k, \quad P_{F_1}(T_k = n) = P(T_k = n-1).$$

On admet que T_k admet une espérance, de sorte que toutes les espérances conditionnelles considérées existent bien aussi. Notons de plus que $T_k(\Omega) = [\![k, +\infty]\!]$ (même argument que pour $S_k(\Omega)$). On a :

$$\begin{aligned}
E(T_k|F_1) &= \sum_{n=k}^{+\infty} nP_{F_1}(T_k = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} nP(T_k = n-1) \\
&= \underbrace{P(T_k = k-1)}_{=0} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} nP(T_k = n-1) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} (n+1)P(T_k = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} nP(T_k = n) + \sum_{n=k}^{+\infty} P(T_k = n) \qquad \text{car toutes les séries convergent} \\
&= E(T_k) + 1
\end{aligned}$$

car $\{[T_k = n],\ n \geq k\}$ est un SCE. D'où le résultat voulu.

(c) Soit $i \in [\![2, k]\!]$. De la même façons, si $P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i$ est réalisé, les i-premiers lancers ne contribuent pas à la constitution d'une série de k-lancers. Ainsi la probabilité d'obtenir pour la première fois k « piles » consécutifs au n-ème lancer sachant $P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i$ réalisé est égal à la probabilité d'obtenir pour la première fois k « piles » consécutifs en exactement $n - i$ lancers (du $(i+1)$-ème lancer au n-ème). Ainsi on a :

$$\forall n \geq k, \quad P_{P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i}(T_k = n) = P(T_k = n - i).$$

Notons d'ailleurs que $P(T_k = n - i) = 0$ si $n - i < k$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
E(T_k|P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i) &= \sum_{n=k}^{+\infty} nP_{P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i}(T_k = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} nP(T_k = n - i) \\
&= \sum_{n=k+i}^{+\infty} nP(T_k = n - i) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} (n+i)P(T_k = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} nP(T_k = n) + i\sum_{n=k}^{+\infty} P(T_k = n) \qquad \text{car toutes les séries convergent} \\
&= E(T_n) + i.
\end{aligned}$$

Ainsi on a $E(T_k|P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i) = E(T_n) + i$ pour tout $i \in [\![2, k]\!]$.

(d) Si l'évènement $P_1 \cap \cdots \cap P_k$ est réalisé, alors on a obtenu une succession de k « pile » consécutifs lors des k premiers lancers, et donc $T_k = k$. Ainsi la loi conditionnelle de T_k sachant l'évènement $P_1 \cap \cdots \cap P_k$ est la loi certaine égale à k. On obtient donc que :

$$E(T_k|P_1 \cap \cdots \cap P_k) = E(k|P_1 \cap \cdots \cap P_k) = k.$$

9. (a) D'après la formule de l'espérance totale appliquée au système complet d'évènements de la

question 8.(a), on a (en admettant que $E(T_k)$ existe) :

$$\begin{aligned} E(T_k) &= \left(\sum_{i=1}^{k} E(T_k|P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i)P(P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i)\right) \\ &\quad + E(T_k|P_1 \cap \cdots \cap P_k)P(P_1 \cap \cdots \cap P_k) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k}(E(T_k)+i)p^{i-1}(1-p)\right) + kp^k \\ &= E(T_k)\sum_{i=1}^{k} p^{i-1}(1-p) + \sum_{i=1}^{k} ip^{i-1}(1-p) + kp^k \\ &= E(T_k)\sum_{j=0}^{k-1} p^j q + \sum_{j=0}^{k-1}(j+1)p^j(1-p) + kp^k \end{aligned}$$

D'où le résultat voulu.

(b) On a (somme des termes d'une progression géométrique de raison $p \neq 1$) :

$$\sum_{j=0}^{k-1} p^j q = q\frac{1-p^k}{1-p} = 1-p^k.$$

Il faut à présent calculer $\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)p^j$. On reconnait ici la « dérivée » de la somme d'une suite géométrique. Soit donc $x \in]-1,1[$, on a :

$$\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}.$$

D'où en dérivant par rapport à x (possible car tout est dérivable), on a :

$$\sum_{i=1}^{k} ix^{i-1} = \frac{-(k+1)x^k(1-x)+(1-x^{k+1})}{(1-x)^2} = \frac{1-(k+1)x^k+kx^{k+1}}{(1-x)^2}.$$

D'où pour $x = p$, on a :

$$\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)p^j = \frac{1-(k+1)p^k+kp^{k+1}}{(1-p)^2}.$$

On obtient alors en substituant dans l'expression de la question précédente :

$$E(T_k) = E(T_k)(1-p^k) + \frac{1-(k+1)p^k+kp^{k+1}}{(1-p)} + kp^k$$

soit encore :

$$E(T_k)p^k = \frac{1-(k+1)p^k+kp^{k+1}+kp^k-kp^{k+1}}{(1-p)}$$

D'où finalement le résultat voulu :

$$E(T_k) = \frac{1-p^k}{qp^k}.$$

10. Il est évident que lorsque la première série de k « piles » consécutifs s'achève, alors on a déjà obtenu au minimum k « piles ». Et donc $S_k \leq T_k$. Par croissance de l'espérance, on a donc $E(S_k) \leq E(T_k)$. Soit encore, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in]0,1[$, on a :

$$\frac{k}{p} \leq \frac{1-p^k}{qp^k} \Leftrightarrow k(1-p)p^{k-1} \leq 1-p^k \Leftrightarrow kp^{k-1}-kp^k \leq 1-p^k \Leftrightarrow kp^{k-1}-1 \leq kp^k-p^k = (k-1)p^k.$$

D'où le résultat.