DS9

Correction du devoir surveillé

Exercice 1 (Edhec 2020)

1. Les fonctions $(x,y,z)\mapsto x$ et $(x,y,z)\mapsto x(y^2+z^2+1)$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ en tant que fonctions polynomiales. La fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction $(x,y,z)\mapsto e^{x(y^2+z^2+1)}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$. Par produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^3}$.

2. Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ on a :
$$\partial_1(f)(x,y,z)=\Big(1+x(y^2+z^2+1)\Big)\,e^{x(y^2+z^2+1)},$$
$$\partial_2(f)(x,y,z)=2x^2ye^{x(y^2+z^2+1)},\qquad \partial_2(f)(x,y,z)=2x^2ze^{x(y^2+z^2+1)}.$$
$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ est un point critique de f si et seulement si
$$\begin{cases}(1+x(y^2+z^2+1))\,e^{x(y^2+z^2+1)}=0\\ 2x^2ye^{x(y^2+z^2+1)}=0\\ 2x^2ze^{x(y^2+z^2+1)}=0\end{cases}\qquad\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}1+x(y^2+z^2+1)=0\\ x^2y=0\\ x^2z=0\end{cases}$$
Si $x=0$, le système est équivalent à $\begin{cases}1&=0\\0&=0\\0&=0\end{cases}$ qui n'a pas de solution.

On a donc $x\neq 0$, et le système est équivalent à :
$$\begin{cases}1+x(y^2+z^2+1)=0\\ y=0\\ z=0\end{cases}\qquad\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}x=-1\\ y=0\\ z=0\end{cases}$$
Ainsi $\boxed{f \text{ admet comme unique point critique le point } A=(-1,0,0).}$

3. (a) On calcule les dérivées partielles d'ordre 2 de f. Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a :
$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y,z)=(y^2+z^2+1)(2+x(y^2+z^2+1))e^{x(y^2+z^2+1)}$$
$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y,z)=\partial^2_{2,1}(f)(x,y,z)=2xy(2+x(y^2+z^2+1))e^{x(y^2+z^2+1)}$$
$$\partial^2_{1,3}(f)(x,y,z)=\partial^2_{3,1}(f)(x,y,z)=2xz(2+x(y^2+z^2+1))e^{x(y^2+z^2+1)}$$
$$\partial^2_{2,2}(f)(x,y,z)=2x^2(1+2xy^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$$
$$\partial^2_{2,3}(f)(x,y,z)=\partial^2_{3,2}(f)(x,y,z)=4x^3yze^{x(y^2+z^2+1)}$$
$$\partial^2_{3,3}(f)(x,y,z)=2x^2(1+2xz^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$$
En particulier en $A=(-1,0,0)$, on obtient :
$$\boxed{\begin{array}{c}\partial^2_{1,1}(f)(-1,0,0)=e^{-1}\\ \partial^2_{1,2}(f)(-1,0,0)=\partial^2_{2,1}(f)(-1,0,0)=0\\ \partial^2_{1,3}(f)(-1,0,0)=\partial^2_{3,1}(f)(-1,0,0)=0\\ \partial^2_{2,2}(f)(-1,0,0)=2e^{-1}\\ \partial^2_{2,3}(f)(-1,0,0)=\partial^2_{3,2}(f)(-1,0,0)=0\\ \partial^2_{3,3}(f)(-1,0,0)=2e^{-1}\end{array}}$$

(b) D'après la question précédente, la hessienne de f au point A est :

$$\boxed{H = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\text{Cette matrice est bien diagonale.}}$ Ses valeurs propres sont donc sur sa diagonale, à savoir e^{-1} et $2e^{-1}$. Comme elles sont toutes strictement positives, $\boxed{f \text{ admet un minimum local en } A}$ et on a $\boxed{f(A) = -e^{-1}.}$

4. (a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On va distinguer les cas $x \geq 0$ et $x < 0$.
   - Cas $x \geq 0$. On a $y^2+z^2+1 \geq 1$, de sorte que $x(y^2+z^2+1) \geq x$ et donc $e^{x(y^2+z^2+1)} \geqslant e^x$ par croissance de l'exponentielle. Et comme $x \geq 0$, on en déduit bien en multipliant par x que $f(x, y, z) \geqslant xe^x$.
   - Cas $x < 0$. On a $x(y^2 + z^2 + 1) < x$, et donc $e^{x(y^2+z^2+1)} < e^x$. En multipliant par $x < 0$ on en déduit $f(x, y, z) > xe^x$.

   Finalement, on a montré que :

$$\boxed{\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) \geqslant xe^x.}$$

(b) On va étudier la fonction $g : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$. g est de classe $\mathscr{C}^1$ en tant que produit de telles fonctions et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = (x+1)e^x.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad xe^x \geq -e^{-1}$$

On en déduit que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) \geqslant xe^x \geqslant -e^{-1} = f(A).$$

Ceci prouve que $\boxed{f \text{ atteint un minimum global en } A.}$

5. Soit $(x, y, z) \in (C)$. On a $x = 1$ et $z = -y$, et à l'aide de l'inégalité établie à la question 4.(a) :

$$f(x, y, z) = f(1, y, -y) \geq 1e^1 = f(1, 0, 0).$$

Ainsi $\boxed{f \text{ admet un minimum global sous la contrainte } (C) \text{ en } B = (1,0,0) \text{ qui a pour valeur } e.}$

6. La fonction $\varphi : (x, y, z) \mapsto x(y^2 + z^2 + 1)$ est polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\nabla(\varphi)(x, y, z) = (y^2 + z^2 + 1, 2xy, 2xz)$$

En particulier, on a $\nabla\varphi(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ pour tout $(x, y, z) \in (C')$ (en fait pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$), de sorte que la contrainte (C') est non critique.

Cherchons les points critiques de f sous la contrainte (C'). On résout pour cela le système suivant :

$$\begin{cases} \varphi(x,y,z) = 1 \\ \nabla(f)(x,y,z) = \lambda \nabla(\varphi)(x,y,z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y^2+z^2+1) = 1 \\ (1+x(y^2+z^2+1))\, e^{x(y^2+z^2+1)} = \lambda(y^2+z^2+1) \\ 2x^2ye^{x(y^2+z^2+1)} = 2\lambda xy \\ 2x^2ze^{x(y^2+z^2+1)} = 2\lambda xz \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(y^2+z^2+1) = 1 \\ 2e = \lambda(y^2+z^2+1) \\ x^2ye = \lambda xy \\ x^2ze = \lambda xz \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{x\neq 0} \begin{cases} x(y^2+z^2+1) = 1 \\ 2ex = \lambda \\ xye = \lambda y \\ xze = \lambda z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(y^2+z^2+1) = 1 \\ x = \frac{\lambda}{2e} \\ \frac{\lambda}{2} y = \lambda y \\ \frac{\lambda}{2} z = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y^2+z^2+1) = 1 \\ x = \frac{\lambda}{2e} \\ \frac{\lambda}{2} y = 0 \\ \frac{\lambda}{2} z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} 0 \times (y^2+z^2+1) = 1 \\ x = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}}_{\text{impossible}} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x(0^2+0^2+1) = 1 \\ x = \frac{\lambda}{2e} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \lambda = 2e \\ y = z = 0 \end{cases}$$

Ainsi, f admet $B = (1,0,0)$ comme unique point critique sous la contrainte (C').

Pour tout (x,y,z) appartenant à la contrainte (C'), on a :

$$f(x,y,z) = xe = \frac{e}{1+y^2+z^2} \leq e = f(1,0,0).$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ admet un max. global sous } (C'), \text{ atteint au point } (1,0,0), \text{ et dont la valeur est } e.}$

Exercice 2 (Edhec 2012)

1. Il s'agit ici d'une question difficile qui nécessite de bien connaitre le théorème de division euclidienne des polynômes dont on rappelle l'énoncé :

> **Rappel. Théorème de la division euclidienne.**
> Soient A, B deux polynômes tels que $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple (Q,R) de polynômes tel que :
> $$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$
> Q et R sont appelés le *quotient* et le *reste* de la *division euclidienne* de A par B.

Soit donc $P_1, P_2 \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. D'après le théorème de division euclidienne, il existe des couples (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) uniques tels que :

$$(1 - X + X^2)P_1 = (1+X^3)Q_1 + R_1 \quad \text{avec} \quad \deg(R_1) \leq 2$$

et
$$(1-X+X^2)P_2 = (1+X^3)Q_2 + R_2 \quad \text{avec} \quad \deg(R_2) \leq 2.$$
Notons que par définition, on a $f(P_1) = R_1$ et $f(P_2) = R_2$.

En multipliant respectivement par λ_1 et λ_2 ces équations et en sommant, on a :
$$(1-X+X^2)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = (1+X^3)(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) + (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2).$$
De plus, on a $\deg(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) \leq 2$. Par unicité dans le théorème de division euclidienne, $(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2)$ est donc **le** reste de la division euclidienne du polynôme $(1-X+X^2)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)$ par $1+X^3$. Par définition de f, on obtient que :
$$f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2).$$
D'où la linéarité de f. Comme de plus $f(P)$ est un polynôme de degré ≤ 2 en tant que reste de la division euclidienne par $(1+X^3)$, on a bien $f(P) \in E$. Ainsi $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$

2. (a) On effectue trois divisions euclidiennes (qu'on posera si nécessaire). On a :
$$(1-X+X^2)\times 1 = (1+X^3)\times 0 + (1-X+X^2) \quad \Rightarrow \boxed{f(e_0) = 1-X+X^2,}$$
$$(1-X+X^2)\times X = X-X^2+X^3 = (1+X^3)\times 1 + (-X^2+X-1) \quad \Rightarrow \boxed{f(e_1) = -1+X-X^2,}$$
$$(1-X+X^2)\times X^2 = X^2-X^3+X^4 = (1+X^3)\times(X-1) + (X^2-X+1) \quad \Rightarrow \boxed{f(e_2) = 1-X+X^2.}$$
En particulier, on a bien : $\boxed{f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2).}$

(b) On a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_0), f(e_1), f(e_2)) = \mathrm{Vect}(1-X+X^2)$ d'après la question précédente. Comme $1-X+X^2 \neq 0_E$, $(1-X+X^2)$ est une famille libre et génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$, et $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$.

(c) Par le théorème du rang, on a :
$$\dim(E) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) \quad \Rightarrow \quad \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim(E) - \dim \mathrm{Im}(f) = 3-1 \boxed{= 2.}$$
De plus on a (en utilisant la linéarité de f) :
$$f(e_0) = -f(e_1) \quad \Rightarrow \quad f(e_0+e_1) = f(1+X) = 0_E$$
et
$$f(e_0) = f(e_2) \quad \Rightarrow \quad f(e_2-e_0) = f(X^2-1) = 0_E$$
Ainsi X^2-1 et $X+1$ appartiennent à $\mathrm{Ker}(f)$. Puisque $(X+1, X^2-1)$ est une famille de vecteurs de $\mathrm{Ker}(f)$ libre car échelonnée en degré, de cardinal égal à $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$, c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

3. (a) D'après ce qui précède, on a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(1-X+X^2)$. Calculons $f(1-X+X^2)$. Pour cela, on effectue la division euclidienne de $(1-X+X^2)(1-X+X^2) = X^4-2X^3+3X^2-2X+1$ par $1+X^3$. On obtient (en posant la division) :
$$X^4-2X^3+3X^2-2X+1 = (1+X^3)(X-2) + 3(X^2-X+1).$$
Ainsi on a $f(X^2-X+1) = 3(X^2-X+1)$. Plus généralement pour tout $P \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda(1-X+X^2)$, et on a :
$$f(P) = \lambda f(X^2-X+1) = 3\lambda(X^2-X+1) \boxed{= 3P.}$$
Ainsi $\boxed{3 \text{ est valeur propre de } f}$ et on a :
$$\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}). \tag{$*$}$$

D'après ce qui précède, 0 et 3 sont donc valeurs propres de f et on a :

$$\dim(E_0(f)) = 2 \quad \text{et} \quad \dim(E_3(f)) \geq 1.$$

Or d'après le cours, on a :

$$\dim(E_0(f)) + \dim(E_3(f)) \leq 3.$$

Ainsi on obtient que $\dim(E_3(f)) = 1 = \dim \mathrm{Im}(f)$. Avec $(*)$, on a donc :

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}).}$$

(b) Avec ce qui précède, on a obtenu :

$$\dim(E_0(f)) + \dim(E_3(f)) = \dim(E).$$

Ainsi on a $\mathrm{Sp}(f) = \{0, 3\}$ et $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$ d'après le cours.

4. On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P, Q) de polynômes de E associe le réel $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k$, où l'on a noté $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ et $Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$.

(a) Montrons que φ est un produit scalaire défini sur E.

- **Linéarité à gauche.** Soient $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2, Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2, R = c_0 + c_1 X + c_2 X^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a $\lambda P + \mu Q = (\lambda a_0 + \mu b_0) + (\lambda a_1 + \mu b_1) X + (\lambda a_2 + \mu b_2) X^2$, d'où :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q, R) &= \sum_{i=0}^{2} (\lambda a_i + \mu b_i) c_i = \lambda \sum_{i=0}^{2} a_i c_i + \mu \sum_{i=0}^{2} b_i c_i \\ &= \lambda \varphi(P, R) + \mu \varphi(Q, R). \end{aligned}$$

- **Symétrie.** Soient $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2, Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$. On a :

$$\varphi(Q, P) = \sum_{i=0}^{2} b_i a_i = \sum_{i=0}^{2} a_i b_i = \varphi(P, Q)$$

Ainsi φ est symétrique, et donc aussi linéaire à droite.

- **Positivité.** Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in E$. On a :

$$\varphi(P, P) = \sum_{i=0}^{2} a_i^2 \geq 0.$$

- **Défini positif.** Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in E$. On a :

$$\varphi(P, P) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{2} \underbrace{a_i^2}_{\geq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_i = 0 \text{ pour } i = 0, 1, 2 \quad \Rightarrow \quad P = 0_E.$$

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est bien un produit scalaire sur } E.}$

(b) Rappelons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1 + X, X^2 - 1)$ et que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(X^2 - X + 1)$. On a :

$$\varphi(1 + X, 1 - X + X^2) = 1 - 1 + 0 = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(-1 + X^2, 1 - X + X^2) = -1 + 0 + 1 = 0.$$

Ainsi on a $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)^\perp$. Comme de plus $\dim \mathrm{Im}(f)^\perp = \dim(E) - \dim \mathrm{Im}(f) = 3 - 1 = 2 = \dim \mathrm{Ker}(f)$, on a $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)^\perp}$. En d'autres termes, $\mathrm{Ker}(f)$ est bien le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Im}(f)$ dans E pour φ.

5. (a) On sait déjà que $\mathscr{B}$ est une base de E. C'est de plus une famille orthonormale car :

$$\varphi(1,1)=1,\ \varphi(1,X)=0,\ \varphi(1,X^2)=0,\ \varphi(X,X)=1,\ \varphi(X,X^2)=0,\ \varphi(X^2,X^2)=1.$$

Donc $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base orthonormale pour le produit scalaire } \varphi.}$

(b) D'après les calculs faits en 2.(a), on a :

$$\boxed{M_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}}.$$

Cette matrice est symétrique dans la base **orthonormée** $\mathscr{B}$ pour le produit scalaire φ. Donc f est un endomorphisme symétrique pour φ. Par le cours, on sait que f est diagonalisable (on retrouve le résultat de 3.(b)), et que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. Ainsi $E=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Ker}(f-3\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Ker}(f-3\mathrm{Id})$ sont orthogonaux pour φ. $\boxed{\text{Ils sont donc supplémentaires orthogonaux}}$ et on retrouve ainsi le résultat de la question 4.(b).

Exercice 3 (Ecricome 2003)

Partie I : loi du χ^2

1. On a $X_1(\Omega)=\mathbb{R}$, d'où $Y_1(\Omega)=\mathbb{R}_+$. Si $x<0$, on a donc $F_{Y_1}(x)=0$ dans ce cas.

Supposons $x\geq 0$. On a :

$$\begin{aligned}F_{Y_1}(x)&=P(X_1^2\leq x)=P(-\sqrt{x}\leq X_1\leq\sqrt{x})=P(X_1\leq\sqrt{x})-P(X_1<-\sqrt{x})\\&=P(X_1\leq\sqrt{x})-P(X_1\leq-\sqrt{x})\quad \text{car } X \text{ est à densité}\\&=\Phi(\sqrt{x})-\Phi(-\sqrt{x})=\Phi(\sqrt{x})-(1-\Phi(\sqrt{x}))=2\Phi(\sqrt{x})-1\end{aligned}$$

Ainsi la fonction de répartition de $Y_1=X_1^2$ est égale à :

$$\boxed{F_{Y_1}: x\in\mathbb{R}\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 2\Phi(\sqrt{x})-1 & \text{sinon}\end{cases}}.$$

La valeur en 0 est ici identique à l'énoncé puisque $2\Phi(0)-1=2\times\dfrac{1}{2}-1=0$.

2. F_{Y_1} est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, en tant que composées de fonctions continues sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Vérifions la continuité en 0. On a :

$$\lim_{x\to 0^-}F_{Y_1}(x)=0=F_{Y_1}(0)=\lim_{x\to 0^+}2\Phi(\sqrt{x})-1.$$

Ainsi F_{Y_1} est bien continue sur $\mathbb{R}$. Elle est de plus de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 comme composées de fonctions qui le sont. Donc $\boxed{Y_1 \text{ est bien une variable à densité.}}$

Pour tout $x\neq 0$, on a :

$$F'_{Y_1}(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ \dfrac{2}{2\sqrt{x}}\varphi(\sqrt{x}) \text{ si } x>0\end{cases}.$$

Une densité de Y_1 est donc (en prenant une valeur arbitraire en 0) :

$$\boxed{f_{Y_1}: x\mapsto\begin{cases}0 \text{ si } x\leq 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}} \text{ si } x>0\end{cases}}.$$

3. On a ici à faire à une transformation affine d'une variable à densité.

> **Rappel. Transformation affine d'une variable à densité.**
> Si X est à densité de densité f_X, alors $Y = aX + b$ est encore une variable à densité, de densité :
> $$f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Ici on connait une densité pour Y_1. Donc $Z_1 = \dfrac{Y_1}{2}$ est encore une variable à densité, et une densité de Z_1 est donnée par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{Z_1}(x) = 2f_{Y_1}(2x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}(2x)^{-1/2}e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1/2)}x^{-1/2}e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$$

On reconnait la densité de la loi $\gamma(1/2)$, de sorte que $\boxed{Z_1 \hookrightarrow \gamma(1/2)}$. Ainsi Z_1 admet une espérance et une variance qui valent toutes deux $\dfrac{1}{2}$. Donc Y_1 admet également une espérance et une variance, et on a :

$$E(Y_1) \underset{\text{lin. de } E}{=} 2E(Z_1) = 2 \times \frac{1}{2} \boxed{= 1},$$
$$V(Y_1) = V(2Z_1) = 4V(Z_1) = 4 \times \frac{1}{2} \boxed{= 2.}$$

4. Les variables $\dfrac{X_i^2}{2}$ sont indépendantes (par le lemme de coalition car les X_i le sont) et suivent toutes une loi $\gamma(1/2)$. Par stabilité des lois γ, on en déduit donc que $Z_n = \dfrac{Y_n}{2} = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{2}\right)$ suit une loi $\gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)$, de densité :

$$\boxed{f_{Z_n} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1}e^{-x} \text{ si } x > 0 \end{cases}.}$$

Ainsi $Y_n = 2Z_n$ est encore une variable à densité (par transformation affine d'une variable à densité), de densité :

$$\boxed{f_{Y_n} : x \mapsto \frac{1}{2} f_{Z_n}(\frac{x}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(n/2)2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

5. Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} 1 \boxed{= n.}$$

Par indépendance des X_i, et donc des $Y_i = X_i^2$ aussi (par lemme de coalition), on a :

$$V(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} 2 \boxed{= 2n.}$$

6. G_n est nulle sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (car f_{Y_n} est nulle sur $]-\infty, 0]$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$). Comme c'est la fonction de répartition d'une variable à densité, elle est de plus continue sur $\mathbb{R}$ et satisfait $\lim\limits_{x \to +\infty} G_n(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} G_n(x) = G_n(0) = 0$. Elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$ par le théorème de la bijection. Ainsi pour tout $\beta \in]0, 1[$, $\boxed{\text{il existe un unique réel } t \in]0, +\infty[\text{ satisfaisant } G_n(t) = \beta.}$

Partie II : Estimation ponctuelle de σ^2

7. On a $E((X_i - m)^2) = E((X_i - E(X_i))^2) = V(X_i) = \sigma^2$. Par linéarité de l'espérance, $E(T_n)$ existe et vaut :
$$E(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E((X_i - m)^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \sigma^2.$$
Donc $\boxed{T_n \text{ est un estimateur sans biais de } \sigma^2.}$

8. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Notons tout d'abord que X admet un moment d'ordre 4 si et seulement si $\dfrac{X-m}{\sigma}$ en admet un également, ce qui va permettre de se ramener à une variable $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et de faciliter un peu les calculs.

   Par le théorème de transfert, Y admet un moment d'ordre 4 si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ converge absolument, donc converge puisque la fonction intégrée est positive. Comme de plus cette fonction est paire, il est équivalent d'établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$. La fonction $t \mapsto t^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc l'intégrale est généralisée en $+\infty$. Et on a :

   - $t^4 \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées ;
   - $\dfrac{1}{t^2} \geq 0$ sur $[1, +\infty[$;
   - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann en $+\infty$ d'exposant $\alpha = 2 > 1$.

   Par théorème de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ converge, et $\boxed{E(X^4) \text{ existe bien.}}$

9. Les variables aléatoires X_i sont indépendantes et de même loi, et admettent un moment d'ordre 4. Par le lemme de coalition, les variables $(X_i - m)^2$ sont donc aussi indépendantes, de même loi, et admettent un moment d'ordre 2. De plus, on a $E((X_i - m)^2) = \sigma^2$. Par la loi faible des grands nombres, T_n converge donc en probabilité vers σ^2. $\boxed{T_n \text{ donc un estimateur convergent de } \sigma^2.}$

Partie III : Estimation par intervalle de confiance de σ^2

10. On a :
$$U_n = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 = U_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - m}{\sigma}\right)^2.$$
Les variables X_i sont indépendantes et suivent toutes une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, donc les variables $\dfrac{X_i - m}{\sigma}$ sont également indépendantes (par lemme de coalition) et suivent toutes une loi $\mathcal{N}(0,1)$. Par définition, $\boxed{U_n \text{ suit donc une loi du } \textit{Chi-deux} \text{ à } n \text{ degrés de liberté.}}$

11. Soit $\alpha \in]0,1[$. On a :
$$\frac{nT_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leq \sigma^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{nT_n}{\sigma^2} \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) \quad \Leftrightarrow \quad U_n \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n).$$
De même on a :
$$\sigma^2 \leq \frac{nT_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)} \quad \Leftrightarrow \quad \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \leq \frac{nT_n}{\sigma^2} = U_n.$$
On a donc :
$$\boxed{\left[\frac{nT_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{nT_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right] = \left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \leq U_n \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right].}$$

12. Avec la question précédente :

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{nT_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{nT_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right) &= P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \leq U_n \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right) \\
&= P(U_n \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)) - P(U_n < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)) \\
&= P(U_n \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)) - P(U_n \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)) \quad \text{car } U_n \text{ est à densité} \\
&= G_n(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)) - G_n(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha.
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\left[\frac{nT_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} ; \frac{nT_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right] \text{ est un intervalle de confiance de } \sigma^2 \text{ au niveau de confiance } 1-\alpha.}$

Exercice 4 (EML 2007)

Partie I : Étude de l'application f.

1. f est continue sur $]0, \infty[$ comme quotient de fonctions qui le sont, et donc le dénominateur ne s'annule pas.

   De plus, on a :

   $$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x}{x} = 1 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1 = f(0).$$

   Donc f est également continue en 0. Ainsi $\boxed{f \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$

2. (a) f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ en tant que composée et quotient de fonctions $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x > 0$, on a :

   $$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \boxed{= \frac{A(x)}{x^2}.}$$

   (b) Au voisinage de 0, on a :

   $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad \frac{x}{1+x} = x\,(1 - x + o(x)) = x - x^2 + o(x^2).$$

   D'où par soustraction :

   $$A(x) = \left(x - x^2\right) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

   On a donc :

   $$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

   Ainsi, on a $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}.}$

   (c) On sait déjà que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0; +\infty[$. Étudions la dérivabilité de f en 0. On a :

   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

   On a au voisinage de 0 :

   $$\ln(1+x) - x = \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

Ainsi, on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-\dfrac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.$$

Ainsi f est dérivable en 0, et $\boxed{f'(0)=-\frac{1}{2}.}$ Comme on a vu de plus que $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}$, on en déduit que f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que f' est continue sur $[0,+\infty[$. En d'autres termes, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0;+\infty[.}$

(d) Étudions les variations de A sur $[0,+\infty[$. A est de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle en tant que composée, sommes, quotient de fonctions qui le sont. De plus, pour tout $x \geq 0$, on a :

$$A'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-(1+x)}{(1+x)^2} = -\frac{x}{(1+x)^2}.$$

On a $A'(x) < 0$ pour tout $x > 0$. Donc A est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$, et on a $A(x) < A(0) = 0$ pour tout $x > 0$.

On a montré que f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$, et on a pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{A(x)}{x^2} < 0.$$

Donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [0;+\infty[.}$

(e) On a pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{x} = \frac{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}.$$

On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = 0$. Par somme, on a donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$

3. On considère l'application

$$B \ : \ [0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto B(x) = -\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x)$$

(a) f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, on a pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{x^2A'(x) - 2xA(x)}{x^4}.$$

On a $A'(x) = -\frac{x}{(1+x)^2}$. D'où en substituant :

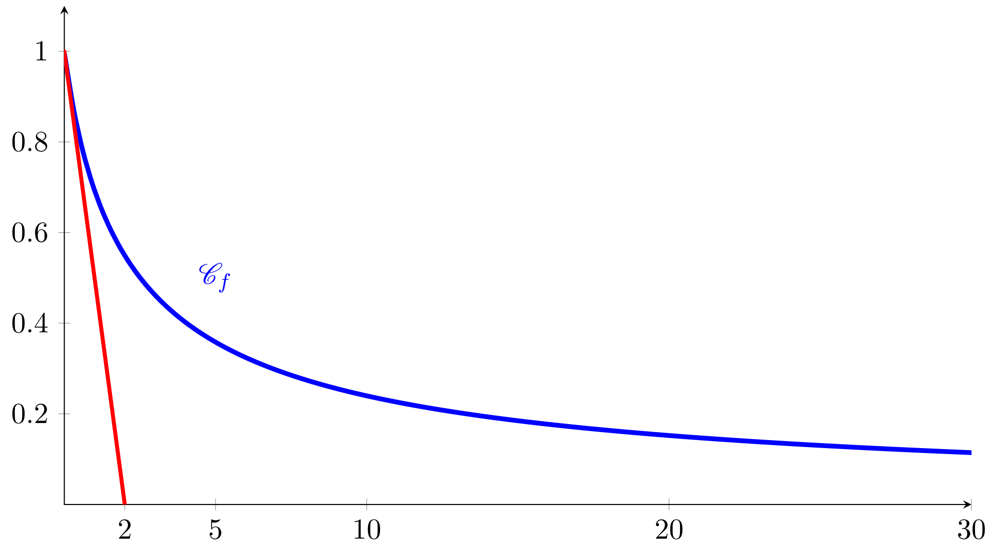
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^3}\left(-\frac{x}{(1+x)^2}x - 2\left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)\right)\right) = \frac{1}{x^3}\left(-\frac{x^2+2x(1+x)}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x)\right) \\ &= \frac{1}{x^3}\left(-\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x)\right) = \boxed{\frac{B(x)}{x^3}.} \end{aligned}$$

(b) B est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme somme, quotient, composée de fonctions qui le sont, et on a pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} B'(x) &= -\frac{(6x+2)(1+x)^2 - (3x^2+2x)\,2(1+x)}{(1+x)^4} + \frac{2}{(1+x)} \\ &= -\frac{2(3x+1)(1+x) - 2(3x^2+2x)}{(1+x)^3} + \frac{2}{(1+x)} \\ &= 2\,\frac{-(3x^2+4x+1) + (3x^2+2x) + (1+x)^2}{(1+x)^3} = \frac{2\,x^2}{(1+x)^3}. \end{aligned}$$

En particulier, on a $B'(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, et donc B est croissante sur $[0,+\infty[$. En particulier, on a $B(x) \geq B(0) = 0$, et donc $f''(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$. Ainsi $\boxed{f \text{ est convexe sur }]0;+\infty[.}$

4. Le dessin doit faire apparaître les points mis en évidence dans les questions précédentes. En particulier, la fonction tracée doit bien être décroissante, convexe, valoir 1 en 0, tendre vers 0 en $+\infty$ et avoir une dérivée en 0 égale à $-\frac{1}{2}$ (ce qui donne la pente de la tangente en 0 et nous permet de la représenter).



Partie II : Un développement en série.

5. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0;1]$, on a (somme des premiers termes d'une suite géométrique avec $-t \neq 1$) :

$$\sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{N}(-t)^k = \frac{1-(-t)^{N+1}}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}.$$

D'où l'égalité :

$$\boxed{\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}.}$$

6. On intègre l'égalité précédente entre 0 et $x \in [0,1]$:

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \int_0^x t^k \,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

par linéarité de l'intégrale (sur un segment). On obtient, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$:

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x)}$$

où $J_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

7. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. On a pour tout $t \in [0,x]$:

$$\left|\frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\right| = \frac{t^{N+1}}{1+t} \leq t^{N+1}$$

car $1+t \geq 1$ sur $[0,x]$. D'où par inégalité triangulaire, et par croissance de l'intégrale :

$$|J_N(x)| \leq \int_0^x \left| \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t} \right| \mathrm{d}t \leq \int_0^x t^{N+1}\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{x^{N+2}}{N+2}.}$$

8. Soit $x \in [0,1]$. On a $|J_N(x)| \leq \dfrac{x^{N+2}}{N+2} \leq \dfrac{1}{N+2}$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{1}{N+2} = 0$. Par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{N\to+\infty} J_N(x)$ existe et vaut 0. À l'aide de l'égalité de la question 6., on en déduit que $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$ existe et vaut $\ln(1+x)$. Ce qui équivaut, après un glissement d'indice, au fait que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ converge et que :

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.}$$

Partie III : Égalité d'une intégrale et d'une somme de série.

9. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1]$. Reprenons l'égalité de la question 7. On a :

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \right| = |J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}.$$

En divisant cette égalité par $x \neq 0$, on obtient :

$$\boxed{\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+2}.}$$

Et cette égalité est encore vraie pour $x=0$, puisque $f(x)=1$ et $\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{(-1)^k x^k}{k+1} = 1$.

10. Intégrons entre 0 et 1 l'inégalité précédente. On a par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{N+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(N+2)^2}.$$

D'où par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left| \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \right| &= \left| \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{(k+1)} \right) \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \mathrm{d}x \leq \frac{1}{(N+2)^2}\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{1}{(N+2)^2} = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que la série $\sum\limits_{k\geq 0} \dfrac{(-1)^k}{(k+1)^2}$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Par glissement d'indice, on en déduit finalement que $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et que :

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.}$$

11. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En séparant les termes pairs et impairs, on a :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2} \boxed{= \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}.}$$

Et de même :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{(-1)^{2p+1-1}}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{(-1)^{2p-1}}{(2p)^2} \boxed{= \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}.}$$

12. Commençons par justifier la convergences des séries apparaissant dans les égalités précédentes :

- les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{p\geq 1} \frac{1}{4p^2} = \frac{1}{4} \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^2}$ convergent en tant que sommes de Riemann, et leur somme vaut respectivement $\frac{\pi^2}{6}$ et $\frac{\pi^2}{24}$.
- la série $\sum_{p\geq 1} \frac{1}{(2p+1)^2}$ converge car :
  - $\frac{1}{(2p+1)^2} \sim \frac{1}{4p^2}$;
  - $\frac{1}{p^2} \geq 0$ pour tout $p \geq 1$;
  - $\sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^2}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann d'exposant $2 > 1$.

  Par théorème de comparaison, la série $\sum_{p\geq 1} \frac{1}{(2p+1)^2}$ converge donc bien.

En passant à la limite quand $N \to +\infty$ dans la première égalité de la question précédente, on obtient (tout converge) :

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{\pi^2}{24} \quad \Rightarrow \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{3\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}.$$

En passant cette fois à la limite dans la deuxième égalité, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Et donc, d'après le résultat de la question 10., on obtient :

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}.}$$

Partie IV : Recherche d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles.

13. Puisque f est continue sur $[0, +\infty[$, par le théorème fondamental de l'analyse, $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x > 0$. Comme de plus f est de classe $\mathscr{C}^1$, on en déduit que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

Les fonctions $(x, y) \mapsto xy$, $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont toutes polynomiales, donc $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$, à valeurs dans $]0, +\infty[$. Par composition et par somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, $\boxed{G \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[^2.}$

On a pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ (dérivation de fonctions composées) :

$\partial_1 G(x, y) = yF'(xy) - F'(x) \boxed{= yf(xy) - f(x)}$, $\quad \partial_2 G(x, y) = xF'(xy) - F'(y) \boxed{= xf(xy) - f(y).}$

Et en dérivant de nouveau :

$$\partial^2_{1,1} G(x, y) \boxed{= y^2 f'(xy) - f'(x)}, \quad \partial^2_{1,2} G(x, y) = \partial^2_{2,1} G(x, y) \boxed{= f(xy) + xyf'(xy)},$$

$$\partial^2_{2,2} G(x, y) \boxed{= x^2 f'(xy) - f'(y).}$$

14. $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ est un point critique de G si et seulement si :

$$\begin{cases} \partial_1 G(x, y) = 0 \\ \partial_2 G(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yf(xy) - f(x) = 0 \\ xf(xy) - f(y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(xy) = \dfrac{f(x)}{y} \\ f(xy) = \dfrac{f(y)}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + xy)}{xy} = \dfrac{\ln(1 + y)}{xy} \\ \dfrac{\ln(1 + xy)}{xy} = \dfrac{\ln(1 + x)}{xy} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(1 + xy) = \ln(1 + y) \\ \ln(1 + xy) = \ln(1 + x) \end{cases}$$

Or la fonction $t \mapsto \ln(1 + t)$ est injective car strictement monotone. Ce dernier système est donc équivalent à :

$$\begin{cases} xy = y \\ xy = x \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{x,y \neq 0} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{G \text{ admet } (1, 1) \text{ comme unique point critique.}}$

15. En $(1, 1)$, on a :

$$\partial^2_{1,1} G(1, 1) = \partial^2_{2,2} G(1, 1) = 0, \quad \partial^2_{1,2} G(1, 1) == f(1) + f'(1) = \ln(2) + \frac{1}{2} - \ln(2) = \frac{1}{2}.$$

On a donc $\nabla^2 G(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = A$. Cherchons les valeurs propres de A. On a $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $\det(A) = -\dfrac{1}{4}$. λ est valeur propre de A si et seulement si :

$$\lambda^2 - 0 \times \lambda + \left(-\frac{1}{4}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm\frac{1}{2}.$$

Ces valeurs propres étant non nulles et de signes opposés, $\boxed{G \text{ n'admet pas d'extremum local en } (1, 1).}$