DS9

Devoir surveillé du 01/04/2022

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = x\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le seul point critique A de f.
3. (a) Calculer les valeurs des dérivées partielles d'ordre 2 de f en A.
   (b) Former la hessienne de f au point A et vérifier qu'elle est diagonale. Montrer que f présente un minimum local en A. Préciser la valeur de ce minimum.
4. (a) Montrer que, pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) \geq x\mathrm{e}^x$.
   (b) Que peut-on en déduire pour le minimum de f trouvé à la question 3.(b) ?
5. On souhaite étudier les extrema de f sous la contrainte linéaire $(C) : \begin{cases} x = 1 \\ y+z = 0 \end{cases}$.

   Montrer que, sous la contrainte (C), f présente un minimum global au point $(1,0,0)$. Quelle est sa valeur ?
6. On souhaite maintenant étudier les extrema de f sous la contrainte $(C') : x(y^2+z^2+1) = 1$.

   Montrer que f possède un maximum global sous la contrainte (C'). En quel point est-il atteint ? Quelle est sa valeur ?

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On note e_0, e_1 et e_2 les polynômes de E définis par : $e_0 = 1$, $e_1 = X$ et $e_2 = X^2$.

On rappelle que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.

On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E, associe le reste de la division euclidienne par $1 + X^3$ du polynôme $(1 - X + X^2)P$.

Ainsi il existe un unique polynôme Q tel que :

$$(1 - X + X^2)P = (1 + X^3)Q + f(P) \qquad \text{avec} \qquad \deg(f(P)) \leq 2.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. (a) Déterminer $f(e_0), f(e_1)$ et $f(e_2)$, puis vérifier que $f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)$.
   (b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) Donner la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. (a) Calculer $f(P)$ pour tout polynôme P de $\mathrm{Im}(f)$, puis établir que 3 est valeur propre de f et que :

   $$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}).$$

   (b) Montrer que f est diagonalisable.

4. On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P, Q) de polynômes de E associe le réel $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k$, où l'on a noté $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ et $Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$.
   (a) Montrer que φ est un produit scalaire défini sur E.
   (b) Vérifier que $\mathrm{Ker}(f)$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Im}(f)$ dans E pour ce produit scalaire.
5. (a) Vérifier que $\mathscr{B}$ est une base orthonormale pour le produit scalaire φ.
   (b) Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$, puis retrouver le résultat de la question 4.(b).

Exercice 3
On admettra dans toute la suite que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Partie I : loi du χ^2

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une loi normale centrée réduite. On pose $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

1. Montrer que la fonction de répartition de $Y_1 = X_1^2$ est égale à :
$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. En déduire que Y_1 est une variable à densité dont on donnera une densité.
3. Déterminer une densité de $\frac{Y_1}{2}$. Reconnaître alors la loi de $\frac{Y_1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de Y_1.
4. En déduire la loi de $\frac{Y_n}{2}$, puis donner une densité de Y_n.

   On dit alors que Y_n suit une loi du Chi-deux à n degrés de liberté, notée $\chi^2(n)$.

5. Donner les valeurs de l'espérance $E(Y_n)$ et de la variance $V(Y_n)$ de Y_n.
6. Soient G_n la fonction de répartition de Y_n et β un réel dans l'intervalle $]0, 1[$.
   Montrer qu'il existe un réel unique t tel que $G_n(t) = \beta$. Ce réel est alors noté $\chi^2_\beta(n)$.

Dans la suite de l'exercice, on considère une suite $(X_i)_{i \geq 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ d'espérance m connue et d'écart-type σ inconnu. L'objet des questions suivantes est de déterminer une estimation ponctuelle (partie 2) puis une estimation par intervalle de confiance (partie 3) de la variance σ^2.

Partie II : Estimation ponctuelle de σ^2

Pour n entier supérieur à 2, on pose : $\quad T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2$.

7. Montrer que T_n est un estimateur sans biais de σ^2.
8. Montrer que si X suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors X admet un moment d'ordre 4.
9. En déduire que T_n est un estimateur convergent de σ^2.

Partie III : Estimation par intervalle de confiance de σ^2

Pour n entier supérieur à 2, on pose : $\quad U_n = \dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2.$

10. Justifier que U_n suit une loi du *Chi-deux* à n degrés de liberté.
11. Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer l'égalité des événements
$$\left[\frac{nT_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{nT_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right] \text{ et } \left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \leq U_n \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right].$$
12. En déduire que $\left[\frac{nT_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}, \frac{nT_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]$ est un intervalle de confiance pour σ^2 au niveau de confiance $1-\alpha$.

Exercice 4

On considère l'application

$$f \ : \ [0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0,\\ 1 & \text{si } x = 0.\end{cases}$$

Partie I : Étude de l'application f.

1. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.
2. On considère l'application
$$A \ : \ [0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$
   (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{A(x)}{x^2}$.

   (b) Montrer que f' admet $-\dfrac{1}{2}$ comme limite en 0 à droite.

   (c) Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$ et préciser $f'(0)$.

   (d) Dresser le tableau de variation de A.
   En déduire que f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

   (e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On considère l'application
$$B \ : \ [0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto B(x) = -\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x)$$
   (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$, et que, pour tout $x \in]0;+\infty[$,
$$f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}.$$
   (b) Dresser le tableau de variation de B.
   En déduire que f est convexe sur $]0;+\infty[$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II : Un développement en série.

5. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0;1]$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}.$$

6. En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x) \ ,$$

où on a noté $J_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t$.

7. Établir, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$: $\quad |J_N(x)| \leq \dfrac{x^{N+2}}{N+2}$.

8. En déduire que, pour tout $x \in [0;1]$, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et que :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Partie III : Égalité d'une intégrale et d'une somme de série.

9. Montrer, en utilisant le résultat de la question 7., pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+2}$$

10. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et que : $\displaystyle\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

11. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \end{cases}$$

12. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer : $\displaystyle\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.

Partie IV : Recherche d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles.

On note $F \ :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t$ et $G \ :]0;+\infty[^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto G(x,y) = F(xy) - F(x) - F(y)$.

13. Montrer que G est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[^2$.

    Exprimer, pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, les dérivées partielles premières et secondes de G en (x,y) en fonction de x, y, $f(x)$, $f(y)$, $f(xy)$, $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(xy)$.

14. Établir que G admet $(1,1)$ comme unique point critique.

15. Est-ce que G admet un extremum local ?