DS9

Devoir surveillé du 14/02/2020

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

   Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, mutuellement indépendantes et admettant toutes f comme densité.
De plus, pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $Y_n = \dfrac{S_n}{n}$.
On admet que S_n et Y_n sont des variables aléatoires à densité, définies elles aussi sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

2. Déterminer la fonction de répartition, notée F, commune aux variables aléatoires X_k.

3. On note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_n. Déterminer explicitement $G_n(x)$ en fonction de n et de x.

4. (a) Montrer que pour tout réel x négatif ou nul, on a $G_n(x) \leq \dfrac{1}{2^n}$.
   (b) Justifier que, pour tout réel x strictement positif, il existe un entier naturel n_0 non nul, tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a $x \geq \dfrac{1}{n}$.
   En déduire que : $\forall x > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \quad G_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{2nx}\right)^n$.

5. (a) Déterminer, pour tout réel x, la limite de $G_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On note $G(x)$ cette limite.
   (b) Montrer que la fonction G ainsi définie est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
   (c) En déduire que $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont la fonction de répartition est G.

6. Vérifier que la variable aléatoire $\dfrac{1}{Y}$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n+1$.
Pour tout k de $\{0, 1, \ldots, 2n+1\}$, on admet que l'expression $X^{2n+1} \times \dfrac{1}{X^k}$ désigne le polynôme X^{2n+1-k}.
On désigne par Id l'endomorphisme identique de E et on note f l'application qui à toute fonction P de E associe la fonction $f(P)$ définie par $f(P) = X^{2n+1}P\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$. Montrer que $f(P) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k} X^k$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de E.
3. (a) Vérifier que $f \circ f = Id$.
   (b) En déduire les deux valeurs propres possibles de f.
4. Soit $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ un polynôme quelconque de $\mathrm{Ker}(f - Id)$.
   (a) Montrer que les a_k $(0 \leq k \leq 2n+1)$ sont solutions du système : $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $a_k = a_{2n+1-k}$.
   (b) En déduire une base de $\mathrm{Ker}(f - Id)$.
5. Déterminer de la même façon une base de $\mathrm{Ker}(f + Id)$.
6. On considère l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ qui, à tout couple (P, Q) de polynômes de E associe le réel $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k b_k$ où l'on a noté $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{2n+1} b_k X^k$.
   (a) Montrer que φ est un produit scalaire défini sur E.
   (b) Établir alors que f est un endomorphisme symétrique.
   (c) En déduire que $\mathrm{Ker}(f - Id)$ et $\mathrm{Ker}(f + Id)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Exercice 3

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre
1. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Rappeler quelle est la loi suivie par S_n. Donner l'espérance et la variance de S_n.
2. À l'aide du théorème de la limite centrée, établir que $\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leq n) = \frac{1}{2}$.
3. En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} \mathrm{d}t$.
4. (a) Utiliser le résultat précédent pour montrer que $\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz}\, \mathrm{d}z \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2n^{n+1}}$.
   (b) On admet que $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$. En déduire un nouvel équivalent de $\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz}\, \mathrm{d}z$.

Problème.

On effectue des lancers d'une pièce donnant « Pile » avec la probabilité p, élément de $]0, 1[$, et donnant « Face » avec la probabilité $q = 1-p$, les différents lancers étant supposés indépendants. Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (resp. F_k) l'événement : « la pièce donne pile (resp. face) au k-ème lancer », on note également S_k le rang du k-ème pile et T_k le rang d'apparition du dernier pile de la première série de k piles consécutifs. On suppose que S_k et T_k sont deux variables aléatoires toutes deux définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Par exemple, si les lancers donnent $F_1, P_2, F_3, P_4, F_5, P_6, P_7, P_8$, alors S_1 et T_1 prennent la valeur 2, S_2 prend la valeur 4, T_2 prend la valeur 7, S_3 prend la valeur 6, T_3 prend la valeur 8, S_4 prend la valeur 7 et S_5 prend la valeur 8.

Partie I : simulations de S_k et T_k.

1. Compléter les lignes 7 et 10 du script `Scilab` suivant pour qu'il affiche la valeur prise par S_k lorsque k et p sont entrés par l'utilisateur :

```
1  k = input('donnez une valeur pour k :')
2  p = input('donnez une valeur pour p :')
3  n = 0
4  c = 0
5  while c<k
6      n=n+1
7      if --- then c = c+1
8      end
9  end
10 disp(---)
```

2. On souhaite que le script précédent affiche la valeur prise par T_k. Remplacer la ligne 7 par la suivant, dûment complétée :

```
7      if --- then c = c+1, else ---
```

Partie 2 : calcul de l'espérance S_k.

3. Donner la loi de S_1 ainsi que son espérance.

4. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à k, on note X_{n-1} la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus lors des $n-1$ premiers lancers.

   (a) Donner la loi de X_{n-1}.

   (b) Donner $S_k(\Omega)$ puis écrire l'événement $[S_k = n]$ à l'aide de la variable X_{n-1}.

   (c) En déduire que la loi de S_k est donnée par :

$$\forall n \geq k,\ P(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.$$

5. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   On pose $Z_1 = S_1$ et, pour tout entier naturel i supérieur ou égal à 2, on pose $Z_i = S_i - S_{i-1}$.
   On admet que $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

   (a) Donner la loi des variables aléatoires Z_i.

   (b) Exprimer S_k à l'aide de certaines des variables Z_i.

   (c) En déduire que S_k possède une espérance et donner sa valeur.

6. Estimation.
   On suppose le paramètre p inconnu et on souhaite trouver un estimateur de p. On admet que, si une suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire Y, alors pour toute fonction f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $P(Y \in I) = 1$, la suite $(f(Y_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $f(Y)$.

   (a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on pose $\overline{Z_k} = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} Z_i$.
   Montrer que la suite $\left(\overline{Z_k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité.

   (b) En déduire que $\dfrac{k}{S_k}$ est un estimateur convergent de p.

   (c) Donner sans calcul la valeur de $\displaystyle\sum_{j=k-1}^{+\infty} P(S_{k-1} = j)$. Monter alors que la variable aléatoire $\dfrac{k-1}{S_k-1}$ possède une espérance et que l'on a : $E\left(\dfrac{k-1}{S_k-1}\right) = p$.

   (d) En déduire que $\dfrac{k}{S_k}$ est un estimateur biaisé de p (on ne cherchera pas à calculer la valeur de ce biais).

Partie 3 : calcul de l'espérance de T_k.

7. Comparer les variables aléatoires S_1 et T_1.

8. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   On admet que T_k possède une espérance que l'on se propose de déterminer.

   (a) Justifier, en utilisant la variable aléatoire W égale au rang du premier face lors de l'expérience décrite au début de ce problème, que les événements $F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2 \cap F_3, P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4, \dots, P_1 \cap \dots \cap P_{k-1} \cap F_k$ et $P_1 \cap \dots \cap P_{k-1} \cap P_k$, forment un système complet d'événements.

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à k, on a $P_{F_1}(T_k = n) = P(T_k = n-1)$, puis en déduire que l'espérance conditionnelle $E(T_k|F_1)$ est égale à $1 + E(T_k)$.

   (c) De la même façons, déterminer, pour tout i de $[\![2, k]\!]$, la valeur de $E(T_k|P_1 \cap \dots \cap P_{i-1} \cap F_i)$.

   (d) Justifier que $E(T_k|P_1 \cap \dots \cap P_k) = k$.

9. (a) Déduire des questions précédentes, la relation :
   $$E(T_k) = \sum_{j=0}^{k-1}(j+1)p^j q + E(T_k)\sum_{j=0}^{k-1} p^j q + kp^k.$$

   (b) Établir finalement que :
   $$E(T_k) = \frac{1-p^k}{qp^k}.$$

10. Justifier que $E(S_k) \leq E(T_k)$ puis utiliser certains résultats des parties 2 et 3 pour établir, sans étude de fonction, que l'on a :
    $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall p \in]0,1[, \quad (k-1)p^k \geq kp^{k-1} - 1.$$