ECS2 **Note /10**

Interrogation de cours 6 du Lundi 14 Octobre 2019

Nom et prénom :

1. (**/ 1 points**) Énoncer le théorème du rang :

2. (**/ 1,5 points**) Soit p la projection sur F parallèlement à G. Compléter (on exprimera F et G en fonction de p) :

$p \circ p =$ $F =$ $G =$

3. (**/ 2 points**) Donner la définition de :

- la matrice $A = (a_{i,j})$ d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E)$ (définir le coefficient $a_{i,j}$):

- la matrice de passage $P = (p_{i,j})$ entre des bases $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ d'un espace vectoriel E (définir le coefficient $p_{i,j}$) :

4. (**/ 2 points**) Énoncer la formule de changement de bases (en définissant précisément chaque terme y apparaissant) :

- pour les vecteurs :

- pour un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$:

5. (/ **3 points**)

- **Groupe C.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

  (1) f est un projecteur de rang r ;

  (2) il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle

$$M_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r \text{ fois}}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r \text{ fois}}) = A_r;$$

  (3) $M_{\mathscr{B}}(f)$ est semblable à A_r.

- **Groupe D.** Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

  1. Écrire explicitement $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
  2. Soit $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, avec $\varepsilon_1 = (1, 0, 1)$, $\varepsilon_2 = (-1, 1, 0)$, $\varepsilon_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
  3. Déterminer la matrice de f dans $\mathscr{C}$.
  4. En déduire la matrice de f^n dans $\mathscr{B}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (inutile d'expliciter ses coefficients).