

Révisions : Suites, fonctions, polynômes

Exercice 0.1 (Étude d'une suite récurrente d'ordre 1)

Dans cet exercice, on étudie la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases} .$$

1. Soit $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1 + x}$.
Étudier les variations de f , puis représenter la courbe représentative de f ainsi que les quatre premiers termes de la suite u .
2. Étude de la suite u .
 - (a) Montrer que $[1, 2]$ est un intervalle stable pour f , c'est-à-dire $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.
 - (b) En déduire que la suite u est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, 2]$.
 - (c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[1, 2]$. On note α cette solution qu'on n'essaiera pas de déterminer.
 - (d) Déterminer le sens de variation de la suite u .
 - (e) Montrer que u converge et déterminer sa limite.
 - (f) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function U = suite(n)` qui calcule le terme d'indice n de la suite u .
3. Approximation de α .
 - (a) Montrer que pour tout $x, y \in [1, 2]$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x - y|$.
 - (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$.
 - (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$.
 - (d) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
 - (e) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function alpha = approx(eps)` qui renvoie une approximation de α à `eps` près.

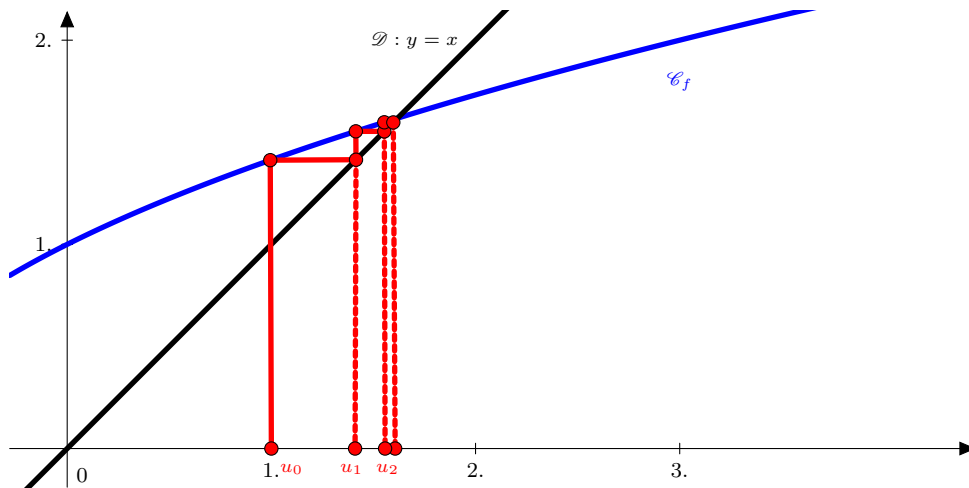
u est une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour une méthode d'étude de ces suites, je vous renvoie au complément de cours sur le sujet.

Complément de cours 0. Méthodes d'étude d'une suite récurrente d'ordre 1.

1. La fonction f est définie et continue sur le segment $[1, 2]$. Elle est de plus dérivable sur $[1, 2]$, de dérivée :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}.$$

On en déduit que f est croissante sur $[1, 2]$. On trace sa représentation graphique (on utilise que $f(1) = \sqrt{2}, f(2) = \sqrt{3}$) :



2. Étude de la suite u .

- (a) On a vu que f est continue, croissante, et que $f(1) = \sqrt{2}$, $f(2) = \sqrt{3}$. Ainsi pour tout $1 \leq x \leq 2$, on a :

$$1 \leq f(2) \leq f(x) \leq f(3) \leq 2.$$

On en déduit que $[1, 2]$ est un intervalle stable pour f , c'est à dire $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.

- (b) Montrons par récurrence que la suite u est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, 2]$.

Init. $u_0 = 1$ est bien défini et appartient au segment $[1, 2]$. D'où la propriété au rang $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang n . Montrons la propriété au rang $n + 1$.

Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et appartient à $[1, 2]$. Puisque f est définie sur $[1, 2]$, on en déduit que le terme $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini. De plus le segment $[1, 2]$ étant stable par f et $u_n \in [1, 2]$, on a $u_{n+1} \in [1, 2]$. D'où la propriété au rang $n + 1$.

Concl. Par principe de récurrence, la suite u est donc bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, 2]$.

- (c)

Idée.

Une telle question devrait immédiatement vous faire penser au théorème de la bijection. Seule difficulté ici, le théorème de la bijection ne peut s'appliquer à f directement pour obtenir une solution de l'équation $f(x) = x$, mais à $g : x \mapsto f(x) - x$. On cherchera donc à montrer qu'il existe une unique solution à l'équation $g(x) = 0$.

Appliquons le théorème de la bijection à g .

- $g : x \mapsto f(x) - x$ est une **fonction continue** sur $[1, 2]$ comme différence de deux fonctions qui le sont.
- Montrons que g est **strictement monotone** sur $[1, 2]$. g est différence de deux fonctions dérivables sur $[1, 2]$. Elle est donc dérivable, et on a pour tout $x \in [1, 2]$:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}.$$

On a $g'(x) < 0$ pour tout $x \in [1, 2]$ car $1 - \sqrt{1+x} < 0$. Ainsi g est strictement décroissante sur cet intervalle.

- Enfin $g(1) = \sqrt{2} - 1 > 0$ et $g(2) = \sqrt{3} - 2 < 0$, donc 0 **appartient à l'intervalle image** $g([1, 2])$.

On déduit de ces trois points et du théorème de la bijection que l'équation $g(x) = 0$ (ou $f(x) = x$) admet une unique solution sur l'intervalle $[1, 2]$. On note α cette solution.

- (d) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.

Init. $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{2}$. D'où la propriété au rang $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang n . Montrons la propriété au rang $n + 1$.

On a par hypothèse de récurrence, $2 \geq u_{n+1} \geq u_n \geq 1$. f étant croissante sur $[1, 2]$, on en déduit que :

$$f(u_{n+1}) \geq f(u_n) \quad \text{soit encore} \quad u_{n+2} \geq u_{n+1}.$$

D'où la propriété au rang $n + 1$.

Concl. Par principe de récurrence, on a donc montré que la suite u est croissante.

(e) La suite u est croissante et majorée par 2. Elle converge donc vers une limite finie $\ell \in [1, 2]$.

De plus cette limite est nécessairement un point fixe de f . En effet on a :

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Puisque f est continue, on obtient en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$:


$$\ell = f(\ell).$$

Or cette équation, on l'a vu, admet une unique solution sur $[1, 2]$ qui est α . On peut donc conclure que u converge vers α .

```
(f) function U=suite(n)
U=1;
for k=1:n
    U=sqrt(1+U);
end
endfunction
```

3. Approximation de α .

(a)

Idée. 

Une telle inégalité devrait vous faire immédiatement penser à l'inégalité des accroissements finis. On l'applique donc ici.

La fonction f est continue sur $[1, 2]$, dérivable sur $]1, 2[$, et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}.$$

Pour tout $x \in]1, 2[$, on a :

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, on peut donc conclure que :

$$\forall (x, y) \in [1, 2], \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x - y|.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique l'inégalité précédente avec $x = u_n$ et $y = \alpha$:

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$$

ce qui donne, puisque $\alpha = f(\alpha)$ et que $u_{n+1} = f(u_n)$:

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|.$$

(c) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

Init. On a bien $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^0 |u_0 - \alpha|$. D'où la propriété au rang $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang n . Montrons la propriété au rang $n + 1$.

Par l'inégalité de la question précédente, on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - \alpha|,$$

et en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

on obtient bien que :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|.$$

D'où la propriété au rang $n + 1$.

Concl. Par principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

Reste à remarquer que $|u_0 - \alpha| = \alpha - 1 \leq 2 - 1 = 1$, d'où finalement :

$$n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n.$$

(d) On cherche n tel que :

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n \leq 10^{-3} \text{ soit } 10^3 \leq (2\sqrt{2})^n.$$

Prenons le logarithme de cette expression (ln est croissant) :

$$3 \ln(10) \leq n \ln(2\sqrt{2}) = \frac{3}{2} \ln(2)n.$$

Ainsi on a $n \geq \frac{2 \ln(10)}{\ln(2)} \approx 6,64..$ u_7 est donc une approximation de α à 10^{-3} près. En exécutant `suite(7)`, on obtient $\alpha \approx u_7 = 1.6178513$.

(e) On reprend le calcul précédent :

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\ln(\varepsilon) \leq \frac{3}{2} \ln(2)n$$

soit encore :

$$n \geq -\frac{2 \ln(\varepsilon)}{3 \ln(2)}.$$

Il faut donc $n = \lfloor -\frac{2 \ln(\varepsilon)}{3 \ln(2)} \rfloor + 1$, et renvoyer u_n . Écrivons le programme à présent.

```
function alpha = approx(eps)
n=floor(-(2*log(eps))/(3*log(2)))+1 //floor est la fonction partie entiere
alpha = suite(n)
endfunction
```

Exercice 0.2 (Étude d'une suite implicite - Edhec 2018)

Une *suite implicite* est une suite (u_n) de réels dont chacun des termes u_n est solution d'une équation du type

$$f_n(x) = 0 \tag{E_n}$$

où $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Il n'est en général pas possible de résoudre explicitement l'équation (E_n) . On ne connaît donc pas en général la valeur de u_n . On dit que ces termes sont définis implicitement.


Méthode.

Pour étudier une suite implicite (u_n) , on pourra procéder ainsi :

- Pour justifier l'existence et l'unicité d'une solution u_n de (E_n) , on pensera au théorème de la bijection dont on rappelle l'énoncé :

Si

- f_n est **strictement monotone** et **continue**,
- l'intervalle image $f_n(I)$ contient 0,

alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n appartenant à I .

- Pour étudier (u_n) , on pensera à utiliser l'équation (E_n) définissant la suite. En effet, on ne connaît pas explicitement les termes de la suite, mais on peut avoir des informations sur la suite de leurs images par f_n . Ainsi pour étudier par exemple la monotonie de (u_n) , on pourra

- comparer $f_n(u_{n+1})$ avec $f_n(u_n) = 0$;
- en déduire le signe de $u_{n+1} - u_n$ en fonction de la monotonie de f .

Pour la recherche d'équivalents, on pensera également à utiliser l'équation $f_n(u_n) = 0$.

L'étude de suites implicites est fréquente aux concours, comme l'an dernier à l'Edhec avec l'exercice suivant.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Soit f_n la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par : $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x admet une seule solution, notée u_n .
2. (a) Vérifier que u_n appartient à $]0, 1[$.
 (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite (u_n) est croissante.
 (c) Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0, 1]$.
 (d) Montrer par l'absurde que la limite de la suite (u_n) vaut 1.
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.
 (a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -n v_n$.
 (b) Établir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{n v_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$ et en déduire que : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.
 (c) Montrer enfin que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.
4. Donner la nature des séries de termes généraux v_n et v_n^2 .

1. On applique le théorème de la bijection :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est polynomiale, donc **continue**.
- f_n est également dérivable sur \mathbb{R}_+ (car polynomiale), et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f'_n(x) = -1 - nx^{n-1} < 0.$$

Donc f_n est **strictement décroissante** sur \mathbb{R}_+ .

- On a $f_n(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty$.

D'après le théorème de la bijection, f_n réalise donc une bijection de \mathbb{R}_+ sur $] -\infty, 1]$. Puisque $0 \in] -\infty, 1]$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet donc une unique solution sur \mathbb{R}_+ . On la note dans la suite u_n .

**Mise en garde.**

Dire que $f'_n(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ ne suffit pas pour conclure que f_n est strictement décroissante. Rappelons le résultat de cours suivant :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si f' est strictement négative, sauf éventuellement en un nombre fini de points de I où f' s'annule, alors f est strictement décroissante.

En particulier ici $f'_n < 0$ sur \mathbb{R}_+ , donc f_n est strictement décroissante.

2. (a) On a $f_n(0) = 1$, $f_n(u_n) = 0$ et $f_n(1) = -1$. Comme de plus f_n est strictement décroissante, on en déduit que u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.
- (b) Rappelons comment procéder.

**Méthode.**

Pour déterminer la monotonie d'une suite implicite, on peut comparer les images $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$, et conclure grâce à la monotonie de f_{n+1} .

Puisque $u_n \in]0, 1[$, on a $u_n^{n+1} \leq u_n^n$, et donc :

$$f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1} \geq 1 - u_n - u_n^n = f_n(u_n) = 0.$$

Puisque f_{n+1} est strictement décroissante et que

$$f_{n+1}(u_n) \geq 0 = f_{n+1}(u_{n+1}),$$

on en déduit que $u_n \leq u_{n+1}$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que la suite (u_n) est croissante.

- (c) La suite (u_n) est **croissante** et **majorée** (car $u_n \in]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Par le théorème de la limite monotone, on peut donc conclure que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ finie. De plus on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 1.$$

Par passage à la limite dans une inégalité, on obtient donc que $0 \leq \ell \leq 1$.

**Mise en garde.**

Une inégalité stricte devient large quand on passe à la limite !

(d)

**Méthode.**

Il faut pour ce type de question penser à revenir à l'équation $f_n(u_n) = 0$ pour obtenir des informations sur (u_n) .

Par l'absurde, supposons que $0 \leq \ell < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_n(u_n) = 0 \quad \text{soit} \quad 1 - u_n - u_n^n = 0.$$

(u_n) étant croissante et convergente vers ℓ , on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_n \leq \ell, \quad \text{d'où} \quad 0 \leq u_n^n \leq \ell^n.$$

Or par hypothèse $0 \leq \ell < 1$, donc on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell^n = 0$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0$. Ainsi tous les termes de l'égalité $1 - u_n - u_n^n = 0$ convergent. Par le théorème de passage à la limite dans les (in)égalités, on en déduit que :

$$1 - \ell - 0 = 0 \quad \text{soit encore } \ell = 1.$$

D'où une contradiction puisque $\ell < 1$ par hypothèse. On peut donc conclure que $\ell = 1$.



Mise en garde.

Ne pas confondre le théorème des gendarmes et le théorème de passage à la limite dans les (in)égalités.

- Pour appliquer le théorème de passage à la limite dans les inégalités, il faut savoir au préalable que **tous** les termes convergent.
- Le théorème des gendarmes est d'une autre nature et démontre deux choses : la **convergence** de la suite encadrée et la valeur de sa limite.

3. (a) Puisque $u_n \in]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $v_n = 1 - u_n \in]0, 1[$ et $\ln(v_n)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus on a $1 - u_n - u_n^n = 0$ et donc :

$$\ln(v_n) = \ln(1 - u_n) = \ln(u_n^n) = n \ln(u_n) = n \ln(1 + (u_n - 1)).$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 1 = 0$, on a :

$$\ln(1 + (u_n - 1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n - 1 = -v_n.$$

D'où finalement $\ln(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -nv_n$.

- (b) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^+$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(v_n) = -\infty$. D'autre part, on a $\ln(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -nv_n$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(v_n)}{nv_n} = 1$ et on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right) = 0$. Par opération sur les limites, on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0.$$

On a $-\ln(v_n), nv_n > 0$, d'où :

$$\frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = \frac{\ln(-\ln(v_n)) - \ln(n) - \ln(v_n)}{-\ln(v_n)} = \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} + 1.$$

De plus, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln(v_n) = +\infty$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u)}{u} = 0$ par croissances comparées, d'où par composition des limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} = 0.$$

On a donc finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} + 1 = 0.$$

Ainsi on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} = -1$, et donc $\ln(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln(n)$.

- (c) On a montré que $\ln(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -nv_n$ et que $\ln(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln(n)$. Donc on a $nv_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$, soit encore $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.

4. On reprendra les résultats sur les séries dans un chapitre à la rentrée. Traitons dès maintenant cette question accessible avec le cours de première année.

La série $\sum v_n$ est à termes positifs d'après les questions précédentes. On utilise le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

- $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$;
- $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}$ pour tout $n \geq 3$;
- la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique).

Par théorème de comparaison, on en déduit que $\sum v_n$ diverge.

De même, la série $\sum v_n^2$ est à termes positifs, et on a :

- $v_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^2}{n^2}$;
- $\frac{\ln(n)^2}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ puisque $\frac{\frac{\ln(n)^2}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{\ln(n)^2}{n^{1/2}} \rightarrow 0$ par croissances comparées ;
- la série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente (série de Riemann d'exposant $\alpha = 3/2 > 1$).

Par théorème de comparaison, on en déduit que $\sum v_n^2$ converge.

Exercice 0.3 (Ecricone 2005)

On définit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

1. Montrer que pour tout entier n , $u_n \geq \sqrt{n}$. Quelle est la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?
2. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} \leq \frac{1+x}{2}$.
 (b) En déduire que pour tout entier n , $u_n \leq n + \frac{u_0}{2n}$, puis que la suite $\left(\frac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0.
 (c) Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0.
 (d) En remarquant que, pour tout entier n non nul, $1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}$, en déduire un équivalent de u_n en $+\infty$.
3. On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$.
 (a) À l'aide d'un développement limité en 0 de $\sqrt{1+x}$, montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite ℓ que l'on précisera.
 (b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - u_{n-1})$.
 (c) Justifier alors qu'il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout entier n , si $n \geq N_0$ alors $u_n \geq u_{n-1} - \frac{1}{2}$.
 (d) Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$, puis que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
4. Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function U = suite(n)` qui calcule le terme d'indice n de la suite lorsque $u_0 = 1$.

1. Tout d'abord, on montre par récurrence que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

Init. u_0 est bien définie et $u_0 \geq 0$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang $n - 1$, et montrons la propriété au rang n .

On a $u_{n-1} \geq 0$ par hypothèse de récurrence, donc $n + u_{n-1} \geq 0$. Ainsi $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$ est bien défini, et positif. D'où la propriété au rang n .

Concl. Par principe de récurrence, u_n est bien défini et positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dès lors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a par croissance de la fonction racine carrée :

$$n \leq n + u_{n-1} \Rightarrow \sqrt{n} \leq \sqrt{n + u_{n-1}} = u_n$$

et on a également $u_0 \geq 0 = \sqrt{0}$. D'où la propriété souhaitée.

On a $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Par théorème de comparaison, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. (a) Pour tout $x \geq 0$, on a :

$$\frac{1+x}{2} - \sqrt{x} = \frac{1+x-2\sqrt{x}}{2} = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{2} \geq 0.$$

D'où l'inégalité souhaitée.

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$.

Init. On a $u_0 \leq 0 + \frac{u_0}{2^0}$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang $n - 1$. Montrons qu'elle est vraie au rang n .

On applique l'inégalité de la question précédente à $x = n + u_{n-1}$:

$$u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} \leq \frac{1 + n + u_{n-1}}{2} = \frac{1+n}{2} + \frac{u_{n-1}}{2}.$$

Or par hypothèse de récurrence, on a :

$$u_{n-1} \leq n - 1 + \frac{u_0}{2^{n-1}}.$$

En remplaçant dans l'expression précédente, on obtient :

$$u_n \leq \frac{1+n}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{u_0}{2^n} = n + \frac{u_0}{2^n}.$$

D'où la propriété au rang n .

Concl. Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n-1} \leq n - 1 + \frac{u_0}{2^{n-1}} \Rightarrow 0 \leq \frac{u_{n-1}}{n^2} \leq \frac{n-1}{n^2} + \frac{u_0}{n^2 2^{n-1}}$$

Puisque $\frac{n-1}{n^2} + \frac{u_0}{n^2 2^{n-1}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{u_0}{n^2 2^{n-1}}$ converge vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Par le théorème des gendarmes, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n-1}}{n^2}$ existe et vaut 0.

(c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_n}{n} = \frac{\sqrt{n + u_{n-1}}}{n} = \sqrt{\frac{n + u_{n-1}}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n^2}}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n^2} = 0$ par la question précédente. Donc la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge bien vers 0.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sqrt{n} \leq u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$$

d'où :

$$1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n + u_{n-1}}{n}}$$

On a donc bien que, pour tout entier n non nul, $1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}$.

On a :

$$\frac{u_{n-1}}{n} = \frac{u_{n-1}}{n-1} \frac{n-1}{n}.$$

Or on a par la question précédente que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n-1}}{n-1} = 0$, et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n} = 1$, on obtient par produit des limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n-1}}{n} = 0.$$

Ainsi on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} = 1$. Par le théorème des gendarmes, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ existe et vaut 1.

Ainsi on a l'équivalent $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

3. On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$.

(a) On a le développement limité usuel suivant en 0 :

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x).$$

On en déduit en particulier l'équivalent suivant :

$$\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x.$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} w_n &= u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n + u_{n-1}} - \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Or on a montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n-1}}{n} = 0$, donc :

$$\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{u_{n-1}}{n}.$$

Enfin on a vu que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}$, donc que $u_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n-1}$. On obtient donc :

$$w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \frac{u_{n-1}}{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \frac{\sqrt{n-1}}{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2}.$$

La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet bien la limite $\ell = \frac{1}{2}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

(b) On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{n - (n-1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}.$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = 0$.

On a $u_n = w_n + \sqrt{n}$ pour tout n , d'où en remplaçant :

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= (w_n + \sqrt{n}) - (w_{n-1} + \sqrt{n-1}) \\ &= (w_n - w_{n-1}) + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \end{aligned}$$

Or on a $\lim w_n = \frac{1}{2}$, donc $\lim w_{n-1} = \frac{1}{2}$, et par différence $\lim w_n - w_{n-1} = 0$. On peut donc conclure avec le calcul de la limite à la question précédente que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - u_{n-1}) = 0.$$

(c) Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - u_{n-1}) = 0$, il existe un certain rang à partir duquel $u_n - u_{n-1} \geq -\frac{1}{2}$, c'est à dire qu'il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout entier n , si $n \geq N_0$ alors $u_n \geq u_{n-1} - \frac{1}{2}$.

(d) On a en utilisant la définition de la suite (u_n) que :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+u_n} - \sqrt{n-1+u_{n-1}}$$

On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(\sqrt{n+u_n} - \sqrt{n-1+u_{n-1}})(\sqrt{n+u_n} + \sqrt{n-1+u_{n-1}})}{\sqrt{n+u_n} + \sqrt{n-1+u_{n-1}}} \\ &= \frac{(n+u_n) - (n-1+u_{n-1})}{\sqrt{n+u_n} + \sqrt{n-1+u_{n-1}}} \\ &= \frac{1+u_n - u_{n-1}}{\sqrt{n+u_n} + \sqrt{n-1+u_{n-1}}}. \end{aligned}$$

La quantité au dénominateur étant toujours positive, $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$. Or pour $n \geq N_0$, on a :

$$1 + u_n - u_{n-1} \geq 1 - 1/2 = 1/2 \geq 0$$

On a donc pour tout $n \geq N_0$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite est donc bien croissante à partir d'un certain rang (le rang N_0).

4.

```
function U = suite(n)
U = 1;
for k=1:n
    U = sqrt(U+k); //sqrt est la fonction racine carré en SciLab
end
endfunction
```

Exercice 0.4

1. Déterminer le développement limité des fonctions suivantes :

- (a) $f : x \mapsto \ln(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de e ;
- (b) $f : x \mapsto \cos(x)e^{-x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 ;
- (c) $f : x \mapsto \frac{\sin(x)^2}{x^2}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0 ;
- (d) $f : x \mapsto \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

2. Calculer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x ; \quad \left| \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(2\pi x) - 1}{\ln(x) + 1 - x}.$$

3. On définit sur $I =]0, +\infty[$ la fonction $f : x \mapsto x^x = e^{x \ln(x)}$.

- (a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur I .
 (b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note toujours f ce prolongement.
 (c) f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$?

4. À l'aide des propriétés de convexité ou concavité des fonctions, montrer les inégalités suivantes :

- (a) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$;
 (b) $\forall x \in]0, +\infty[, \ln(x) \leq x - 1$;
 (c) $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 1 - \frac{2x}{\pi} \leq \cos(x) \leq 1$.

1. (a) On cherche le $DL_4(e)$ de la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$. Pour cela, on pose $h = x - e$ de sorte que quand $x \rightarrow e$, on a $h \rightarrow 0^+$. On remplace dans f en notant que $x = e + h$:

$$f(e + h) = \ln(e + h).$$

Il cherche se ramener à un DL qu'on connaît, c'est à dire ici celui de $\ln(1 + u)$ en 0. Pour cela on factorise par e :

$$f(e + h) = \ln\left(e\left(1 + \frac{h}{e}\right)\right) = \ln(e) + \ln\left(1 + \frac{h}{e}\right) = 1 + \ln\left(1 + \frac{h}{e}\right).$$

On connaît les DL usuels (?) qu'on applique ici :

$$f(e + h) = 1 + \left(\frac{h}{e} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{e}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{e}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{h}{e}\right)^4 + o(h^4)\right).$$

Reste enfin à remplacer $h = x - e$:

$$f(x) \underset{x \rightarrow e}{=} 1 + \frac{x - e}{e} - \frac{1}{2}\left(\frac{x - e}{e}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x - e}{e}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x - e}{e}\right)^4 + o((x - e)^4).$$

- (b) Faisons le $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \cos(x)e^{-x}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right) \times \left(1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + o(x^3)\right) \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{2!} + o(x^3) \\ &= 1 - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

- (c) On cherche le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \frac{(\sin(x))^2}{x^2}$. Puisqu'on divise par x^2 , cela va faire tomber l'ordre du DL de 2. Il faut donc chercher un $DL_6(0)$ de $(\sin(x))^2$:

$$\begin{aligned} (\sin(x))^2 &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right) \times \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{(3!)^2} + \frac{x^6}{5!} + o(x^6) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{36}\right)x^6 + o(x^6) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{8}{180}x^6 + o(x^6) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

Reste à diviser par x^2 :

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{45}x^4 + o(x^4).$$

- (d) On cherche le $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$. Là aussi, on divise par x^2 . Il faut donc chercher un $DL_5(0)$ du numérateur.

$$\begin{aligned} e^x - \sqrt{1+2x} &= e^x - (1+2x)^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) - \left(1 + \frac{1}{2}(2x) + \frac{1/2(1/2-1)}{2!}(2x)^2 \right. \\ &\quad + \frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)}{3!}(2x)^3 + \frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)(1/2-3)}{4!}(2x)^4 \\ &\quad \left. + \frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)(1/2-3)(1/2-4)}{5!}(2x)^5 \right) + o(x^5) \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{6}x^3 + \frac{15}{24}x^4 - \frac{3 \times 5 \times 7}{5!}x^5 + o(x^5) \\ &= x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{16}{24}x^4 + \frac{106}{120}x^5 + o(x^5) \\ &= x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{53}{60}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

Reste enfin à diviser par x^2 :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{53}{60}x^3 + o(x^3)$$

2. (a) On cherche la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}_{=: f(x)}$. Pour cela, le premier réflexe à avoir est de passer sous

forme exponentielle :

$$f(x) = \exp\left(x \times \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$$

On a un équivalent en $+\infty$ de $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

On obtient :

$$x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x} = 1.$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$. D'où en passant à l'exponentielle qui est une fonction continue, on obtient que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = e^1 = e.$$



Mise en garde.

Attention à ne pas dire :

$$x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$$

d'où en passant à l'exponentielle :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^1 = e.$$

Même si cela donne le même résultat, ça repose sur une démarche fautive en général : un équivalent n'est pas compatible avec la composition par l'exponentielle (ici ça fonctionne car c'est équivalent à la constante 1...). Ce serait donc sanctionné dans une copie de concours.

- (b) On cherche la limite suivante $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(2\pi x) - 1}{\ln(x) + 1 - x}$. C'est une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. Pour lever cette indétermination, on se ramène déjà en 0 en posant $h = x - 1$, soit $x = h + 1$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(2\pi x) - 1}{\ln(x) + 1 - x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(2\pi(h+1)) - 1}{\ln(1+h) + 1 - (1+h)}.$$

On cherche un équivalent du dénominateur et du numérateur.

- On a :

$$\cos(2\pi(h+1)) - 1 = \cos(2\pi h + 2\pi) - 1 = \cos(2\pi h) - 1 \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -\frac{(2\pi h)^2}{2} = -2\pi^2 h^2.$$

- On a :

$$\ln(1+h) + 1 - (1+h) = \ln(1+h) + 1 - 1 - h = \ln(1+h) - h.$$

Pour obtenir un équivalent, on effectue un développement limité en 0 (à l'ordre 2 pour obtenir un terme non nul) :

$$\ln(1+h) - h \underset{h \rightarrow 0}{=} h - \frac{h^2}{2} + o(h^2) - h = -\frac{h^2}{2} + o(h^2).$$

On en déduit que :

$$\ln(1+h) - h \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -\frac{h^2}{2}.$$

Par quotient d'équivalents, on obtient finalement :

$$\frac{\cos(2\pi h) - 1}{\ln(1+h) - h} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{-2\pi^2 h^2}{-\frac{h^2}{2}} = 4\pi^2.$$

On en déduit finalement :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(2\pi x) - 1}{\ln(x) + 1 - x} = 4\pi^2.$$

3. (a) f est de classe \mathcal{C}^1 sur I comme composée de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I .
 (b) On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ par croissances comparées. La fonction exponentielle étant continue, on a par composition :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(x)} = e^0 = 1.$$

La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

- (c) Pour tout $x \in I$, on a :

$$f'(x) = \left[\ln(x) + x \frac{1}{x} \right] e^{x \ln(x)} = [\ln(x) + 1] e^{x \ln(x)}.$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(x) + 1] = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(x)} = 1.$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty$. Par le théorème de passage à la limite sur la dérivée, f n'est donc pas dérivable en 0, et admet une tangente verticale en 0.

Autre méthode. On cherche la limite du taux d'accroissement en 0^+ :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{x \ln(x)} - 1}{x}$$

Pour cela on peut utiliser l'astuce suivante :

$$\frac{e^{x \ln(x)} - 1}{x} = \frac{e^{x \ln(x)} - 1}{x \ln(x)} \ln(x).$$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ et $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$, d'où par composition :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(x)} - 1}{x \ln(x)} = 1.$$

On en déduit finalement par produit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty.$$

La fonction f n'est donc pas dérivable en 0. Elle est donc continue sur $[0, +\infty[$, mais pas de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.

4. (a) Montrons l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$.

Pour cela, on commence par noter que $f = \exp$ est convexe : elle est en effet de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = e^x \geq 0.$$

La courbe de \exp est donc au dessus de ses tangentes, notamment celle en 0 d'équation :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x + 1.$$

On conclut donc que $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque. Une autre méthode consiste à étudier $g : x \mapsto e^x - x - 1$, d'en dresser le tableau de variation, et de conclure que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- (b) On montre cette fois que \ln est concave sur $I =]0, +\infty[$. $f = \ln$ est de classe \mathcal{C}^2 sur I , et on a :

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0 \quad \forall x \in I.$$

Donc \ln est bien concave sur I . Sa courbe représentative est donc en dessous de ses tangentes, notamment celle en 1 d'équation :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = x - 1.$$

On en conclut que $\forall x \in]0, +\infty[, \ln(x) \leq x - 1$.

- (c) Montrons que \cos est concave sur $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. $f = \cos$ est de classe \mathcal{C}^2 sur I et on a :

$$f'(x) = -\cos(x) \leq 0 \quad \forall x \in I.$$

Ainsi \cos est bien concave. Sa courbe représentative est donc en dessous de ses tangentes, notamment celle en 0 d'équation :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 1.$$

Sa courbe représentative est aussi au dessus de ses cordes, notamment celle entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ d'équation :

$$y = ax + b$$

avec $b = f(0) = 1$ et $a = \frac{f(\pi/2) - f(0)}{\pi/2 - 0} = -\frac{2}{\pi}$. On peut donc conclure que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad 1 - \frac{2x}{\pi} \leq \cos(x) \leq 1.$$

Exercice 0.5 (Ecricome 2004)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

Partie 1. Étude de la bijection réciproque de f .

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans l'intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.
2. Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1} .

3. Justifier que pour tout $x \in J$,
$$\begin{cases} \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \\ \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \end{cases}.$$

4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et montrer que :

$$\forall x \in J \setminus \{1\}, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

5. En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de f^{-1} à l'ordre 1.

Partie 2. Étude des dérivées successives de f .

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I . On note $f^{(n)}$ la dérivée n -ième de f sur I .
2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.$$

3. Déterminer les polynômes P_1 et P_2 .
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = (1 - X^2)P'_n + (n + 1)XP_n$.
En déduire le polynôme P_3 .
5. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n .

Partie 1. Étude de la bijection réciproque de f .

1. On applique ici le théorème de la bijection à f .

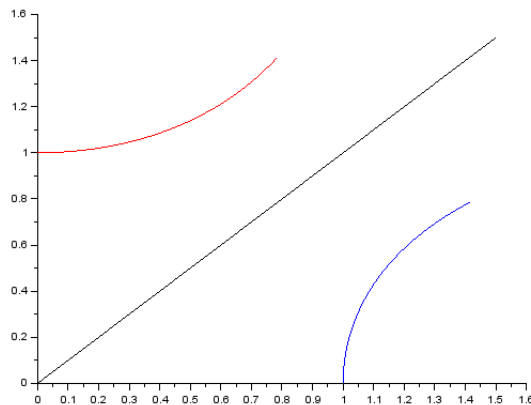
- f est une fonction **continue sur** I comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
- f est dérivable sur I comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et on a pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}$$

Pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, on a $f'(x) > 0$, et $f'(0) = 0$. La fonction f est donc **strictement croissante sur** I .

Par le théorème de la bijection, la fonction f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$ qui est $[f(0), f(\pi/4)] = [1, 2/\sqrt{2}]$.

2. On trace l'allure de la courbe de f en utilisant que $f'(0) = 0$. La courbe de f^{-1} est la symétrique de celle de f par rapport à la droite $y = x$.



Script SciLab.

```
t = 0:0.1:1.5
plot2d(t,t) //droite y=x
x = linspace(0,%pi/4,100)
y = cos(x)
z=y.^(-1)
plot2d(x,z,5) //courbe de f
plot2d(z,x,2) //courbe de f^{-1}
```

Courbe de f en rouge, de f^{-1} en bleu.

3. On a pour tout $x \in J$:

$$f \circ f^{-1}(x) = x$$

d'où en remplaçant :

$$\frac{1}{\cos(f^{-1}(x))} = x$$

On en déduit en passant à l'inverse (possible car $x \neq 0$ sur J) :

$$\cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x}.$$

Pour la deuxième égalité, on utilise que pour tout $y \in I$, on a :

$$\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2(y) = 1 - \cos^2(y).$$

Donc on a :

$$\sin(y) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(y)}.$$

Or \sin est positive sur $[0, \pi/4]$, on a donc que :

$$\sin(y) = \sqrt{1 - \cos^2(y)},$$

et avec $y = f^{-1}(x)$:

$$\sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(f^{-1}(x))} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

4. Rappelons le théorème de dérivation de f^{-1} :

Rappel. Dérivabilité de la fonction réciproque.

Soit f une fonction bijective d'un intervalle I sur un intervalle J . Alors f^{-1} est dérivable sur J si et seulement si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I . Et on a alors

$$\forall x \in J, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Ici f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur $I \setminus \{0\}$, donc f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{f(0)\} = J \setminus \{1\}$ et on a pour tout $x \in J \setminus \{1\}$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{\cos^2(f^{-1}(x))}{\sin(f^{-1}(x))} = \frac{1/x^2}{\sqrt{1-1/x^2}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

5. Puisque f^{-1} est dérivable en $\sqrt{2} \in J$, on sait alors que f^{-1} admet un $DL_1(\sqrt{2})$ et que celui-ci est :

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(\sqrt{2}) + (f^{-1})'(\sqrt{2})(x - \sqrt{2}) + o((x - \sqrt{2})).$$

Or $f^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$ et $(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On a donc le DL :

$$f^{-1}(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \sqrt{2}) + o((x - \sqrt{2})).$$

Partie 2. Étude des dérivées successives de f .

- f est le quotient de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur I dont le dénominateur ne s'annule pas, donc f est de classe \mathcal{C}^∞ .
- On montre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.$$

Init. On a $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$ en prenant $P_0 = 1$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n , et montrons cette propriété au rang $n + 1$.
Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.$$

On dérive (f est \mathcal{C}^∞ , on peut donc le faire) :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\cos(x)P_n'(\sin(x))\cos^{n+1}(x) - (n+1)\sin(x)\cos^n(x)P_n(\sin(x))}{\cos(x)^{2n+2}} \\ &= \frac{\cos^2(x)P_n'(\sin(x)) - (n+1)\sin(x)P_n(\sin(x))}{\cos(x)^{n+2}} \\ &= \frac{(1 - \sin^2(x))P_n'(\sin(x)) - (n+1)\sin(x)P_n(\sin(x))}{\cos(x)^{n+2}}. \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n + 1$ en posant $P_{n+1} = (1 - X^2)P_n' + (n + 1)XP_n$.

Concl. Par principe de récurrence, on a donc montré la propriété pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- On dérive f :

$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}.$$

D'où $P_1 = X$. On dérive de nouveau (f est deux fois dérivable !) :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\cos(x)\cos(x)^2 + 2\sin(x)\cos(x)\sin(x)}{\cos(x)^4} \\ &= \frac{\cos(x)^2 + 2\sin(x)^2}{\cos(x)^3} = \frac{(1 - \sin(x)^2) + 2\sin(x)^2}{\cos(x)^3} \end{aligned}$$

Donc $P_2 = 1 + X^2$.

Pour aller plus loin.

S'il existe, le polynôme P_n satisfaisant :

$$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$$

est unique. En effet, si Q_n satisfait la même relation, on aurait alors :

$$\frac{P_n(\sin(x)) - Q_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)} = 0, \quad \text{soit } (P_n - Q_n)(\sin(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Le polynôme $P_n - Q_n$ admet ainsi une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul, et donc $P_n = Q_n$.

- On a vu dans la récurrence précédente que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = (1 - X^2)P'_n + (n + 1)XP_n$. On calcule P_3 grâce à cette formule. On trouve $P_3 = X^3 + 5X$.
- Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$ et que $CD(P_n) = 1$ ($CD(P_n)$: coefficient dominant de P_n).

Init. $P_0 = 1$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n , et montrons la propriété au rang $n + 1$.

On a :

$$P_{n+1} = (1 - X^2)P'_n + (n + 1)XP_n$$

Par hypothèse de récurrence, $\deg(P_n) = n$ et P_n unitaire. Donc ici, le degré de P'_n est au plus $n - 1$, donc $\deg((1 - X^2)P'_n) \leq n + 1$, et $\deg((n + 1)XP_n) = n + 1$. Ainsi $\deg(P_{n+1}) \leq n + 1$.

On regarde le terme de plus au degré, en X^{n+1} : dans $(1 - X^2)P'_n$, il est égal à $-X^2 \times (nX^{n-1}) = -nX^{n+1}$, et dans $(n + 1)XP_n$ il vaut $(n + 1)X \times X^n$. Ainsi le terme de plus au degré de P_{n+1} est $-n + (n + 1) = 1$. D'où la propriété au rang $n + 1$.

Concl. On conclut par principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unitaire de degré n .

Exercice 0.6 (Polynômes d'interpolation de Lagrange - )

Étant donné $(n + 1)$ complexes distincts (a_0, a_1, \dots, a_n) et $(n + 1)$ complexes (b_0, b_1, \dots, b_n) , on cherche un polynôme P de degré minimal tel que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(a_i) = b_i.$$

Proposition. Un tel polynôme existe. Il est de plus unique si l'on suppose que $\deg(P) \leq n$.

- On définit $L_i = \prod_{k \neq i} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$. Montrer que $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ pour tout i , et calculer $L_i(a_j)$.

En déduire l'existence du polynôme P de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i$.

- Démontrer l'unicité d'un tel polynôme. Y a-t-il toujours unicité si on ne suppose pas $\deg(P) \leq n$?

- On définit $L_i = \prod_{k \neq i} \frac{X - a_k}{a_i - a_k} = \frac{X - a_1}{a_i - a_1} \dots \frac{X - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} \frac{X - a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} \dots \frac{X - a_n}{a_i - a_n}$. L_i est le produit de n polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré 1, donc $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$.

On a pour tout $0 \leq j \leq n$:

- si $j \neq i$, a_j est racine de L_i par définition, donc $L_i(a_j) = 0$;

- si $j = i$, alors on a :

$$L_i(a_i) = \underbrace{\frac{a_i - a_1}{a_i - a_1}}_{=1} \cdots \underbrace{\frac{a_i - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}}}_{=1} \underbrace{\frac{a_i - a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}}}_{=1} \cdots \underbrace{\frac{a_i - a_n}{a_i - a_n}}_{=1} = 1.$$

On retiendra donc que le polynôme L_i satisfait :

$$L_i(a_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases} =: \delta_{i,j} \quad (\text{symbole de Kronecker}).$$

On cherche un polynôme P de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i$. Pour cela, on utilise les polynômes L_i introduits précédemment, et on va chercher P comme combinaison linéaire des L_i :

$$P = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i.$$

En évaluant en $X = a_j$, on obtient :

$$P(a_j) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \underbrace{L_i(a_j)}_{=\delta_{i,j}} = \lambda_j.$$

On en déduit que $P = \sum_{i=0}^n b_i L_i$ convient : il est bien de degré $\leq n$ comme combinaison linéaire de polynômes de degré n , et on a bien $P(a_i) = b_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$.

Exemple.

Prenons $n = 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$. Dans ce cas, les polynômes des Lagranges sont :

$$L_0(X) = \frac{X-1}{0-1} \frac{X-2}{0-2} = \frac{1}{2}(X-1)(X-2),$$

$$L_1(X) = \frac{X-0}{1-0} \frac{X-2}{1-2} = -X(X-2),$$

$$L_2(X) = \frac{X-0}{2-0} \frac{X-1}{2-1} = \frac{1}{2}X(X-1).$$

Si $b_0 = 3$, $b_1 = 2$, $b_2 = -2$, le polynôme P construit précédemment est donc dans notre cas :

$$P = 3L_0 + 2L_1 - 2L_2 = \frac{3}{2}(X-1)(X-2) - 2X(X-2) - X(X-1).$$

On vérifiera qu'on a bien alors $P(0) = 3$, $P(1) = 2$ et $P(2) = -2$, ce qu'on voulait.

- Supposons qu'il existe deux polynômes P_1 et P_2 de degré $\leq n$ et tels que :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P_1(a_i) = b_i = P_2(a_i).$$

Si on pose $Q = P_1 - P_2$, alors Q est un polynôme de degré $\leq n$ ayant $n+1$ racines distinctes a_0, \dots, a_n . C'est donc le polynôme nul :

$$Q = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 = P_2.$$

Il n'y a plus unicité si on ne suppose pas $\deg(P) \leq n$: en effet, si P est le polynôme ci-dessus, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, le polynôme $Q_\lambda = P + \lambda \prod_{0 \leq i \leq n} (X - a_i)$ satisfait aussi :

$$Q_\lambda(a_i) = b_i \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Exercice 0.7 (Polynômes de Tchebychev -)

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \text{ et } P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la parité, le degré ainsi que le coefficient dominant de P_n .
2. (a) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a $2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.
(b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre sur $[0, \pi]$ l'équation $\cos(n\theta) = 0$.
(b) En déduire que P_n est scindé dans \mathbb{R} et déterminer ses racines.
(c) Donner alors une expression factorisée de $P_n(X)$.
(d) En calculant $P_n(0)$ de deux manières différentes, montrer que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. À l'aide des formules de De Moivre et du binôme de Newton, donner une autre expression de $P_n(X)$.

1. Montrons par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « P_n est de même parité que n ».

Init. Comme $T_0 = 1$ et $T_1 = X$, on a clairement $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Montrons $\mathcal{P}(n+2)$ vraie.

Par hypothèse de récurrence, $P_{n+1}(-X) = (-1)^{n+1}P_{n+1}(X)$ et $P_n(X) = (-1)^n P_n(X)$ car P_n a même parité que n . D'où en substituant dans la relation définissant P_{n+2} :

$$P_{n+2}(-X) = 2(-X)(-1)^{n+1}P_{n+1}(X) - (-1)^n P_n(X) = (-1)^{n+2}(2XP_{n+1} - P_n) = (-1)^{n+2}P_{n+2}.$$

Ainsi P_{n+2} est de même parité que $n+2$ ce qui prouve $\mathcal{P}(n+2)$.

Concl. Par principe de récurrence on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Montrons par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété : $\mathcal{Q}(n)$: « $\deg(P_n) = n$ et que le coefficient dominant $CD(P_n) = 2^{n-1}$ ».

Init. Pour $n = 1$, $T_1 = X$ donc $\deg(T_1) = 1$ et $CD(T_1) = 1 = 2^0$.

Pour $n = 2$, $T_2 = 2X^2 - 1$ donc $\deg(T_2) = 2$ et $CD(T_2) = 2 = 2^{2-1}$. Ainsi $\mathcal{Q}(1)$ et $\mathcal{Q}(2)$ sont vraies.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ et $\mathcal{Q}(n+1)$ sont vraies. Montrons $\mathcal{Q}(n+2)$ vraie aussi.

On a $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$. Par hypothèse de récurrence, on a $\deg(P_n) = n$ et $\deg(2XP_n) = \deg(X) + \deg(P_{n+1}) = n+2$. Ainsi $\deg(P_n) < \deg(2XP_{n+1})$, et donc $\deg(P_{n+2})$ est égal à $\deg(2XP_n) = n+2$.

De plus, comme $\deg(P_n) < \deg(2XP_{n+1})$, le coefficient dominant de P_{n+2} est celui du polynôme $2XP_{n+1}$. Or, on a :

$$CD(P_{n+2}) = CD(2XP_{n+1}) = 2CD(XP_{n+1}) = 2CD(P_{n+1}) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

D'où la propriété au rang $(n+2)$.

Concl. Par principe de récurrence on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P_n) = n$ et $CD(P_n) = 2^{n-1}$.

C'est de plus vrai pour $n = 0$ car $\deg(P_0) = 0$ et $CD(P_0) = 1$.

2. (a) On a :

$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b), \\ \cos(a - b) &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b).\end{aligned}$$

D'où en sommant ces deux expressions :

$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos(a) \cos(b)$$

d'où l'égalité souhaitée.

(b) Montrons par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{S}(n)$: « pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ ».

Init. $P_0(\cos(x)) = 1 = \cos(0 \times x)$ et $P_1(\cos(x)) = \cos(x) = \cos(1 \times x)$. Donc $\mathcal{S}(0)$ et $\mathcal{S}(1)$ sont vraies.

Hér. Soit $n \geq 0$ tel que $\mathcal{S}(n)$ et $\mathcal{S}(n + 1)$ sont vraies. Montrons que $\mathcal{S}(n + 2)$ est également vraie.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}P_{n+2}(\cos(x)) &= 2 \cos(x) P_{n+1}(\cos(x)) - P_n(\cos(x)) && \text{par définition des polynômes de T.} \\ &= 2 \cos(x) \cos((n + 1)x) - \cos(nx) && \text{par hyp. de réc.} \\ &= \cos(x + (n + 1)x) + \cos(x - (n + 1)x) - \cos(nx) && \text{par la formule précédente.} \\ &= \cos((n + 2)x) + \cos(-nx) - \cos(nx) = \cos((n + 2)x)\end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $n + 2$.

Concl. Par principe de récurrence, on a $P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. (a) On résout l'équation $\cos(nx) = 0$ pour $x \in [0, \pi]$. On a :

$$\begin{aligned}\cos(nx) = 0 &\iff nx \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{n} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{(2k + 1)\pi}{2n} \iff_{x \in [0, \pi]} \exists k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, x = \frac{(2k + 1)\pi}{2n}\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\left\{ \frac{(2k + 1)\pi}{2n}, k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket \right\}.$$

(b) Pour tout $x \in [0, \pi]$, on a $P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$. D'après la question précédente, on a pour tout $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$:

$$P_n \left(\cos \left(\frac{(2k + 1)\pi}{2n} \right) \right) = \cos \left(\frac{(2k + 1)\pi}{2} \right) = 0.$$

Ainsi, $\cos \left(\frac{(2k + 1)\pi}{2n} \right)$ est racine de P_n pour tout $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. Or, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, les éléments $\frac{(2k + 1)\pi}{2n}$ sont deux à deux distincts de $[0, \pi]$, intervalle sur lequel \cos est injective (car strictement décroissante), donc on a trouvé $n = \deg(P_n)$ racines distinctes pour P_n . On les a donc toutes et P_n est scindé sur \mathbb{R} (puisque toutes ses racines sont bien réelles).

(c) Comme le coefficient dominant de P_n est 2^{n-1} (par la question précédente), sa forme factorisée est :

$$P_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos \left(\frac{(2k + 1)\pi}{2n} \right) \right)$$

(d) Prenons $X = 0$ dans l'expression factorisée précédente. On obtient :

$$P_n(0) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(0 - \cos \left(\frac{(2k + 1)\pi}{2n} \right) \right) = (-1)^n 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \cos \left(\frac{(2k + 1)\pi}{2n} \right).$$

D'autre part, on a :

$$P_n(0) = P_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} .$$

Avec ces deux égalités, on obtient donc :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n/2}}{(-1)^n 2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} = \begin{cases} \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. D'après la formule de Moivre, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(nx) = \operatorname{Re}(e^{inx}) = \operatorname{Re}((e^{ix})^n) = \operatorname{Re}((\cos(x) + i \sin(x))^n)$$

À l'aide de la formule du binôme de Newton, on a :

$$(\cos(x) + i \sin(x))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(x)^{n-k} i^k \sin^k(x)$$

On cherche la partie réelle de cette expression. On ne conserve donc que les termes pairs de cette expression, c'est-à-dire tous les $k = 2p$ compris entre 0 et n :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(x)^{n-k} i^k \sin^k(x) &= \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} \cos(x)^{n-2p} i^{2p} \sin^{2p}(x) + i(\dots) \\ &= \sum_{0 \leq 2p \leq n} \cos(x)^{n-2p} \binom{n}{2p} (-1)^p (\sin^2(x))^p + i(\dots) \\ &= \sum_{0 \leq 2p \leq n} \cos(x)^{n-2p} \binom{n}{2p} (-1)^p (1 - \cos^2(x))^p + i(\dots) \end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles, on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(nx) = \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} \cos(x)^{n-2p} (-1)^p (1 - \cos^2(x))^p.$$

Or on a vu que $P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$P_n - \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} X^{n-2p} (-1)^p (1 - X^2)^p$$

s'annule sur tous les réels de la forme $\cos(x)$, c'est à dire sur $[-1, 1]$. Ce polynôme admet donc une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul, et on peut alors conclure que :

$$P_n = \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} X^{n-2p} (X^2 - 1)^p.$$