TD0

Révisions : Suites, fonctions, polynômes

Ce TD est à travailler pendant les vacances d'été. En cas de besoin, on pourra consulter sa correction qui est disponible à l'adresse `mathieu-mansuy.fr/ecs2/`. *Ce TD sera l'objet du* ***Devoir Surveillé 0*** *qui aura lieu* ***Mardi 3 Septembre****. Le DS0 sera* ***constitué d'une partie des exercices de cette feuille****.*

Exercice 0.1 (Étude d'une suite récurrente d'ordre 1)

Une *suite récurrente d'ordre 1* est une suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où f est une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'étude de telles suites est fréquente aux concours (Edhec 2016 par exemple).

Méthode.

Bien qu'aucune connaissance théorique à ce sujet n'est exigée, il est utile d'avoir en tête les méthodes générales pour l'étude de ces suites. Pour cela, on pourra se référer au

☞ **Complément de cours 0. Méthodes d'étude d'une suite récurrente d'ordre 1.**

Dans cet exercice, on étudie la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}.$$

1. Soit $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$.
   Étudier les variations de f, puis représenter la courbe représentative de f ainsi que les quatre premiers termes de la suite u.
2. Étude de la suite u.
   (a) Montrer que $[1,2]$ est un intervalle stable pour f, c'est à dire $f([1,2]) \subset [1,2]$.
   (b) En déduire que la suite u est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,2]$.
   (c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[1,2]$. On note α cette solution qu'on n'essaiera pas de déterminer.
   (d) Déterminer le sens de variation de la suite u.
   (e) Montrer que u converge et déterminer sa limite.
   (f) Écrire une fonction `Scilab` d'en-tête `function U = suite(n)` qui calcule le terme d'indice n de la suite u.
3. Approximation de α.
   (a) Montrer que pour tout $x, y \in [1,2]$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x-y|$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$.
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$.
   (d) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
   (e) Écrire une fonction `Scilab` d'en-tête `function alpha = approx(eps)` qui renvoie une approximation de α à `eps` près.

Exercice 0.2 (Étude d'une suite implicite - Edhec 2018)

Une *suite implicite* est une suite (u_n) de réels dont chacun des termes u_n est solution d'une équation du type

$$f_n(x) = 0 \qquad (E_n)$$

où $f_n : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Il n'est en général pas possible de résoudre explicitement l'équation (E_n). On ne connait donc pas en général la valeur de u_n. On dit que ces termes sont définis implicitement.

Méthode.

Pour étudier une suite implicite (u_n), on pourra procéder ainsi :

- *Pour justifier l'existence et l'unicité d'une solution u_n de (E_n), on pensera au théorème de la bijection dont on rappelle l'énoncé :*

  Si
  - *f_n est **strictement monotone** et **continue**,*
  - *l'intervalle image $f_n(I)$ contient 0,*

  alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n appartenant à I.

- *Pour étudier (u_n), on pensera à utiliser l'équation (E_n) définissant la suite. En effet, on ne connait pas explicitement les termes de la suite, mais on peut avoir des informations sur la suite de leurs images par f_n. Ainsi pour étudier par exemple la monotonie de (u_n), on pourra*
  - *comparer $f_n(u_{n+1})$ avec $f_n(u_n) = 0$;*
  - *en déduire le signe de $u_{n+1} - u_n$ en fonction de la monotonie de f.*

  Pour la recherche d'équivalents, on pensera également à utiliser l'équation $f_n(u_n) = 0$.

L'étude de suites implicites est fréquente aux concours, comme l'an dernier à l'Edhec avec l'exercice suivant.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.
Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x admet une seule solution, notée u_n.
2. (a) Vérifier que u_n appartient à $]0, 1[$.
   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0, 1]$.
   (d) Montrer par l'absurde que la limite de la suite (u_n) vaut 1.
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -n\,v_n$.
   (b) Établir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{n\,v_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$ et en déduire que : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.
   (c) Montrer enfin que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.
4. Donner la nature des séries de termes généraux v_n et v_n^2.

Exercice 0.3 (Ecricome 2005)

On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n \geq \sqrt{n}$. Quelle est la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?
2. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{x} \leq \dfrac{1+x}{2}$.

   (b) En déduire que pour tout entier n, $u_n \leq n + \dfrac{u_0}{2^n}$, puis que la suite $\left(\dfrac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

   (c) Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

   (d) En remarquant que, pour tout entier n non nul, $1 \leq \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1+\dfrac{u_{n-1}}{n}}$, en déduire un équivalent de u_n en $+\infty$.

3. On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$.

   (a) À l'aide d'un développement limité en 0 de $\sqrt{1+x}$, montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ que l'on précisera.

   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n - u_{n-1})$.

   (c) Justifier alors qu'il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout entier n, si $n \geq N_0$ alors $u_n \geq u_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

   (d) Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$, puis que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

4. Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function U = suite(n)` qui calcule le terme d'indice n de la suite lorsque $u_0 = 1$.

Exercice 0.4

1. Déterminer le développement limité des fonctions suivantes :

   (a) $f : x \mapsto \ln(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de e ;

   (b) $f : x \mapsto \cos(x)e^{-x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 ;

   (c) $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)^2}{x^2}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0 ;

   (d) $f : x \mapsto \dfrac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

2. Calculer les limites suivantes :

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$;

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\cos(2\pi x)-1}{\ln(x)+1-x}$.

3. On définit sur $I =]0,+\infty[$ la fonction $f(x) = x^x = e^{x\ln(x)}$.

   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

   (b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note toujours f ce prolongement.

   (c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$?

4. À l'aide des propriétés de convexité ou concavité des fonctions, montrer les inégalités suivantes :

   (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$;

   (b) $\forall x \in]0,+\infty[$, $\ln(x) \leq x - 1$;

   (c) $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $1 - \dfrac{2x}{\pi} \leq \cos(x) \leq 1$.

Exercice 0.5 (Ecricome 2004)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

Partie 1. Étude de la bijection réciproque de f.

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans l'intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.

2. Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1}.

3. Justifier que pour tout $x \in J$, $\begin{cases} \cos(f^{-1}(x)) = \dfrac{1}{x} \\ \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} \end{cases}$.

4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et montrer que :
$$\forall x \in J \setminus \{1\},\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

5. En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de f^{-1} à l'ordre 1.

Partie 2. Étude des dérivées successives de f.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f sur I.

2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que :
$$\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.$$

3. Déterminer les polynômes P_1 et P_2.

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = (1 - X^2)P_n' + (n+1)XP_n$.
   En déduire le polynôme P_3.

5. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.

Exercice 0.6 (Polynômes d'interpolation de Lagrange - ✍)
Étant donné $(n+1)$ complexes distincts $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ et $(n+1)$ complexes $(b_0, b_1, \cdots, b_n)$, on cherche un polynôme P de degré minimal tel que
$$\forall i \in [\![0, n]\!], P(a_i) = b_i.$$

Proposition. Un tel polynôme existe. Il est de plus unique si l'on suppose que $\deg(P) \leq n$.

1. On définit $L_i = \prod_{k \neq i} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$. Montrer que $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ pour tout i, et calculer $L_i(a_j)$.
   En déduire l'existence du polynôme P de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0, n]\!], P(a_i) = b_i$.

2. Démontrer l'unicité d'un tel polynôme. Y a-t-il toujours unicité si on ne suppose pas $\deg(P) \leq n$?

Exercice 0.7 (Polynômes de Tchebychev - ✍)
On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} P_0 = 1 \text{ et } P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la parité, le degré ainsi que le coefficient dominant de P_n.

2. (a) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.
   (b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre sur $[0, \pi]$ l'équation $\cos(n\theta) = 0$.
   (b) En déduire que P_n est scindé dans $\mathbb{R}$ et déterminer ses racines.
   (c) Donner alors une expression factorisée de $P_n(X)$.
   (d) En calculant $P_n(0)$ de deux manières différentes, montrer que :
$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} \text{ si } n \text{ est pair,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

4. À l'aide des formules de De Moivre et du binôme de Newton, donner une autre expression de $P_n(X)$.
