

TD0

Révisions : Suites, fonctions, polynômes

Ce TD est à travailler pendant les vacances d'été. En cas de besoin, vous pourrez consulter sa correction qui est disponible à l'adresse mathieu-mansuy.fr/ecs2/. Ce TD fera l'objet du **Devoir Surveillé 0** qui aura lieu **Mardi 3 Septembre**. Le DS0 sera **constitué en partie des exercices de cette feuille**.

Exercice 0.1 (Étude d'une suite récurrente d'ordre 1)

Une suite récurrente d'ordre 1 est une suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où f est une fonction d'un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . L'étude de telles suites est fréquente aux concours (Edhec 2016 par exemple).



Méthode. Étude d'une suite récurrente d'ordre 1.

Bien qu'aucune connaissance théorique à ce sujet n'est exigée, il est utile d'avoir en tête les méthodes générales pour l'étude de ces suites. Pour cela, on pourra se référer au

☞ **Complément de cours 0. Méthodes d'étude d'une suite récurrente d'ordre 1.**

Dans cet exercice, on étudie la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases} .$$

1. Soit $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1 + x}$.

Étudier les variations de f , puis représenter la courbe représentative de f ainsi que les quatre premiers termes de la suite u .

2. Étude de la suite u .

- (a) Montrer que $[1, 2]$ est un intervalle stable pour f , c'est à dire $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.
- (b) En déduire que la suite u est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, 2]$.
- (c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[1, 2]$. On note α cette solution qu'on n'essiera pas de déterminer.
- (d) Déterminer le sens de variation de la suite u .
- (e) Montrer que u converge et déterminer sa limite.
- (f) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function U = suite(n)` qui calcule le terme d'indice n de la suite u .

3. Approximation de α .

- (a) Montrer que pour tout $x, y \in [1, 2]$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x - y|$.
- (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$.
- (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$.
- (d) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

- (e) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `fonction alpha = approx(eps)` qui renvoie une approximation de α à `eps` près.

Exercice 0.2 (Étude d'une suite implicite - Edhec 2018)

Une *suite implicite* est une suite (u_n) de réels dont chacun des termes u_n est solution d'une équation du type

$$f_n(x) = 0 \quad (E_n)$$

où $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Il n'est en général pas possible de résoudre explicitement l'équation (E_n) . On ne connaît donc pas en général la valeur de u_n . On dit que ces termes sont définis implicitement.



Méthode. Étude d'une suite implicite.

Pour étudier une suite implicite (u_n) , on pourra procéder ainsi :

- Pour justifier l'existence et l'unicité d'une solution u_n de (E_n) , on pensera au théorème de la bijection dont on rappelle l'énoncé :

Si

- f_n est **strictement monotone** et **continue**,
- l'intervalle image $f_n(I)$ contient 0,

alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n appartenant à I .

- Pour étudier (u_n) , on pensera à utiliser l'équation (E_n) définissant la suite. En effet, on ne connaît pas explicitement les termes de la suite, mais on peut avoir des informations sur la suite de leurs images par f_n . Ainsi pour étudier par exemple la monotonie de (u_n) , on pourra

- comparer $f_n(u_{n+1})$ avec $f_n(u_n) = 0$;
- en déduire le signe de $u_{n+1} - u_n$ en fonction de la monotonie de f .

Pour la recherche d'équivalents, on pensera également à utiliser l'équation $f_n(u_n) = 0$.

L'étude de suites implicites est fréquente aux concours, comme en 2018 à l'Edhec avec l'exercice suivant.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Soit f_n la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x admet une seule solution, notée u_n .
2. (a) Vérifier que u_n appartient à $]0, 1[$.
 (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite (u_n) est croissante.
 (c) Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0, 1]$.
 (d) Montrer par l'absurde que la limite de la suite (u_n) vaut 1.
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.
 (a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -n v_n$.
 (b) Établir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{n v_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$ et en déduire que : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

(c) Montrer enfin que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.

4. Donner la nature des séries de termes généraux v_n et v_n^2 .

Exercice 0.3

1. Déterminer le développement limité des fonctions suivantes :

(a) $f : x \mapsto \ln(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de e ;

(b) $f : x \mapsto \cos(x)e^{-x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 ;

(c) $f : x \mapsto \frac{\sin(x)^2}{x^2}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0 ;

(d) $f : x \mapsto \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

2. Calculer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x ; \quad \left| \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(2\pi x) - 1}{\ln(x) + 1 - x} \right.$$

3. On définit sur $I =]0, +\infty[$ la fonction $f : x \mapsto x^x = e^{x \ln(x)}$.

(a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur I .

(b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note toujours f ce prolongement.

(c) f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$?

4. À l'aide des propriétés de convexité ou concavité des fonctions, montrer les inégalités suivantes :

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$;

(b) $\forall x \in]0, +\infty[, \ln(x) \leq x - 1$;

(c) $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 1 - \frac{2x}{\pi} \leq \cos(x) \leq 1$.

Exercice 0.4 (Ericome 2004)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

Partie 1. Étude de la bijection réciproque de f .

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans l'intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.

2. Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1} .

3. Justifier que pour tout $x \in J$,
$$\begin{cases} \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \\ \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \end{cases} .$$

4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et montrer que :

$$\forall x \in J \setminus \{1\}, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

5. En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de f^{-1} à l'ordre 1.

Partie 2. Étude des dérivées successives de f .

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I . On note $f^{(n)}$ la dérivée n -ième de f sur I .
2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.$$

3. Déterminer les polynômes P_1 et P_2 .
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = (1 - X^2)P'_n + (n + 1)XP_n$.
En déduire le polynôme P_3 .
5. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n .

Exercice 0.5 (Polynômes d'interpolation de Lagrange - )

Étant donné $(n+1)$ complexes distincts (a_0, a_1, \dots, a_n) et $(n+1)$ complexes (b_0, b_1, \dots, b_n) , on cherche un polynôme P de degré minimal tel que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i.$$

Proposition. Un tel polynôme existe. Il est de plus unique si l'on suppose que $\deg(P) \leq n$.

1. On définit $L_i = \prod_{k \neq i} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$.

Montrer que $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ pour tout i , et calculer $L_i(a_j)$.

En déduire l'existence du polynôme P de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i$.

2. Démontrer l'unicité d'un tel polynôme. Y a-t-il toujours unicité si on ne suppose pas $\deg(P) \leq n$?

Exercice 0.6 (Polynômes de Tchebychev - )

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \text{ et } P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la parité, le degré ainsi que le coefficient dominant de P_n .
2. (a) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a $2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a + b) + \cos(a - b)$.
(b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre sur $[0, \pi]$ l'équation $\cos(n\theta) = 0$.
(b) En déduire que P_n est scindé dans \mathbb{R} et déterminer ses racines.
(c) Donner alors une expression factorisée de $P_n(X)$.
(d) En calculant $P_n(0)$ de deux manières différentes, montrer que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. À l'aide des formules de De Moivre et du binôme de Newton, donner une autre expression de $P_n(X)$.