TD0b

# Analyse asymptotique, fonctions convexes

## Analyse asymptotique

### Exercice 0.7 (★)

Calculer les développements limités suivants en 0 :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{2+x}$ à l'ordre 4 ;
2. $x \mapsto \ln(e+x)$ à l'ordre 4 ;
3. $x \mapsto a^x + b^x$ à l'ordre 3 ;
4. $x \mapsto \cos(x) - \dfrac{\sin(x^2)}{2}$ à l'ordre 4 ;
5. $x \mapsto (1+\exp(x))^2$ à l'ordre 3.
6. $x \mapsto \sin(x)\cos(2x)$ à l'ordre 4.
7. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1-x^2}$ à l'ordre 4.
8. $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ à l'ordre 3.

---

### Exercice 0.8 (★★)

Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \cos x$ à l'ordre 4 au voisinage de $\frac{\pi}{3}$.
2. $f : x \mapsto e^x$ à l'ordre 4 au voisinage de 1.
3. $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$ au voisinage de $+\infty$.

---

### Exercice 0.9 (★)

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$ ;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos(x) - x}{(\ln(1+x))^2}$ ;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(\ln(1+x)+1-e^x)}{\sin(x)-x}$ ;
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+2)(x-1)}{x\ln(x)}$.

---

### Exercice 0.10 (★)

1. À l'aide de la formule de Taylor-Young, montrer que $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x)-x}{2x - 2\ln(1+x) - (\sin(x))^2}$.

1. Rappelons pour commencer le résultat suivant :

**Rappel. Existence d'un développement limité d'ordre $n$.**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. **Si** $f$ est classe $\mathscr{C}^n$ sur $I$, **alors** $f$ admet un développement limité d'ordre $n$ en $a$, donné par la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n).$$

La fonction $f = \arctan$ étant de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$, elle admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 qui est d'après la formule de Taylor Young :

$$\arctan(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

Comme *arctan* est impaire, il n'y a que des termes impairs dans son DL, de sorte qu'on peut préciser :

$$\arctan(x) = f'(0)x + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

Reste donc à calculer les valeurs manquantes :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad , \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}$$

soit $f'(0) = 1$ et $f^{(3)}(0) = -2$. On en déduit en remplaçant dans le développement limité que :

$$\arctan(x) = x + \frac{-2}{3!}x^3 + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

2. On obtient donc que $\arctan(x) - x \sim_0 -\frac{x^3}{3}$. D'autre part on a :

$$\begin{aligned} 2x - 2\ln(1+x) - (\sin(x))^2 &= 2x - 2(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - (x + o(x^2))^2 \\ &= 2x - 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + o(x^3) = -\frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \sim_0 -\frac{2}{3}x^3 \end{aligned}$$

Ainsi on a $\dfrac{\arctan(x) - x}{2x - 2\ln(1+x) - (\sin(x))^2} \sim_0 \dfrac{-\frac{x^3}{3}}{-\frac{2x^3}{3}} = \dfrac{1}{2}$, et donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x) - x}{2x - 2\ln(1+x) - (\sin(x))^2} = \frac{1}{2}.$$

---

**Exercice 0.11 (★)**

1. Montrer que $x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ définit une fonction prolongeable par continuité en 0 dont le prolongement est dérivable en 0.

2. Même question avec $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$.

Avant d'attaquer cet exercice, rappelons le résultat clef pour le résoudre (voir le Chapitre 0 si nécessaire).

**Rappel. Lien entre dérivabilité et développement limité.**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On a :

$$f \text{ est dérivable en } a \iff f \text{ admet un développement limité à l'ordre 1 en } a.$$

De plus, ce développement limité est alors nécessairement :

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a).$$

1. Posons $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$. $f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne tend pas vers 0. Pour étudier la continuité et la dérivabilité en 0, on effectue un développement limité :

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad \Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} + o(x).$$

   En particulier, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1/2$. $f$ est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1/2$.

   D'après le rappel ci-dessus, la fonction $f$ ainsi prolongée est de plus dérivable en 0 car elle admet un développement limité d'ordre 1 en 0, et on a $f'(0) = 0$.

2. Procédons de la même manière, en posant cette fois $g : \mathbb{R}\setminus\{0\} \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$. $g$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne tend pas vers 0. Et on a :

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \quad \Rightarrow \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} o(x).$$

   En particulier, on a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$, et $g$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$.

   Toujours avec le rappel ci-dessus, $g$ est de plus dérivable en 0 car elle admet un développement limité d'ordre 1 en 0, et on a $g'(0) = 1/2$.

---

## Exercice 0.12 (★★)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1. Donner le développement limité de $f$ à l'ordre 2 au voisinage de 0. En déduire la tangente $T_0$ à $\mathscr{C}_f$ en 0 et leurs positions relatives.

2. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{=} x + 1 + \dfrac{3}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Que dire de $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ ?

1. On a les DL en 0 suivants :

$$x\sqrt{x^2+1} \underset{x\to 0}{=} x \times (1 + o(x)) = x + o(x^2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{x-1} \underset{x\to 0}{=} -1 - x - x^2 + o(x^2).$$

D'où par produit :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} (x+o(x^2)) \times (-1-x-x^2+o(x^2)) = -x-x^2+o(x^2).$$

On obtient alors la tangente en 0 en conservant les termes de degrés 0 et 1. La tangente à $f$ en 0 est donc $y=-x$. De plus, on a :

$$f(x)+x \underset{x\to 0}{=} -x^2+o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2.$$

$f(x)+x$ est donc du signe de $-x^2$ au voisinage de 0, donc négatif. On peut donc conclure que $T_0$ est au dessus de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0.

2. On a :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{1-\frac{1}{x}} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}.$$

On a :

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right)+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

D'où par produit :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\times\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} x+1+\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

En particulier, on a :

$$f(x)-(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2x}.$$

On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=0$, et $f(x)-(x+1)$ est du signe de $\dfrac{3}{2x}$, donc positif, au voisinage de $+\infty$. On peut interpréter ce résultat graphiquement en disant que la courbe $\mathscr{C}_f$ « tend » en $+\infty$ vers la droite d'équation $y=x+1$, et qu'elle est au dessus de cette droite au voisinage de $+\infty$. On parle d'asymptote oblique à la courbe en $+\infty$.

On retiendra de cet exercice les points suivants :

**✍ À retenir. Étude locale d'une fonction.**

- Pour déterminer la tangente à $\mathscr{C}_f$ en un point $a$, on peut effectuer un $DL_1(a)$ de $f$ : l'équation de la tangente est alors donnée par les termes de degrés 0 et 1 de ce développement limité.

- Pour déterminer la position relative de la courbe représentative d'une fonction $f$ par rapport à sa tangente, on cherche un équivalent de $x\mapsto f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)$ en $a$ en effectuant un $DL$ de $f$ :

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a) \underset{a}{\sim} a_p(x-a)^p \quad \text{avec} \quad a_p\in\mathbb{R}^* \text{ et } p\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}.$$

  Alors $x\mapsto f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ est du signe de $a_p(x-a)^p$ au voisinage de $a$ :

  - si $p$ est pair, $f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ est de signe constant au voisinage de $a$. La courbe est au-dessus ou en-dessous de sa tangente en $a$ (suivant le signe de $a_p$).

– si $p$ est impair, $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ change de signe en $a$. La courbe traverse sa tangente en $a$. On parle de *point d'inflexion*.

**✍ À retenir. Asymptotes obliques.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ admet une *asymptote oblique* en $\pm\infty$ s'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) - ax - b$ tende vers 0 en $\pm\infty$.

---

**Exercice 0.13 (★)**

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $u_n = (2n-1)^3$, alors :

   ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^3)$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 8n^3$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^4)$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{n^4}{2}\right)$

2. Si $u_n = \frac{2}{n} - \frac{3}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}$, alors :

   ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ ☐ $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ ☐ $u_n = \frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$

   ☐ $u_n = \frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

3. Soit $(u_n)$ une suite réelle. Alors on a $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

4. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors :

   ☐ $u_n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n + 1$ ☐ $2u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ☐ $-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n$ ☐ $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$ ☐ $u_n - v_n = o(v_n)$

   ☐ $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$ ☐ $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$

---

**Exercice 0.14 (★★)**

Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

1. $u_n = \exp\left(\dfrac{1-\sqrt{n}}{1+n}\right) - 1$
2. $v_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+n}$
3. $w_n = \sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2^n}\right)\right)$

1. On a $\dfrac{1-\sqrt{n}}{1+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-\sqrt{n}}{n} = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\sqrt{n}}{1+n} = 0$. Comme de plus $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, on a donc :

$$\exp\left(\frac{1-\sqrt{n}}{1+n}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-\sqrt{n}}{1+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. On a ici une différence entre deux termes, ce qui nous pousse à passer par un développement limité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} v_n &= \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+n} = n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - n\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} \\ &= n\left(1 + \frac{1}{2n^2} - 1 - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n}. \end{aligned}$$

3. On sait que $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin(\theta)$, d'où ici pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$w_n = \sin(\sin(\frac{n}{2^n})).$$

Or on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ par croissances comparées, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(\frac{n}{2^n}) = 0$ par composition avec la fonction continue sin. D'où en se rappelant que $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ :

$$w_n = \sin(\sin(\frac{n}{2^n})) \sim \sin(\frac{n}{2^n}) \sim \frac{n}{2^n}.$$

---

### Exercice 0.15 (★★)

Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{2^n+(-1)^n}{3n+(-1)^{n+1}}$
2. $u_n = \sqrt[n]{n}$
3. $u_n = n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$
4. $u_n = \left(\dfrac{n}{n-x}\right)^n$
5. $u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$
6. $u_n = \dfrac{3n^2+(-1)^n}{\sqrt{n^2+2}+\ln(n)}$

---

### Exercice 0.16 (★★★)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ que l'on notera $x_n$. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que $x_n \sim n\pi$.
3. Montrer que $x_n - n\pi \sim \frac{\pi}{2}$.
4. Montrer que $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$. En déduire que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $I_n = \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ et $g : x \in I_n \mapsto \tan(x) - x$.
   - La fonction $g$ est **continue** sur $I_n$.
   - La fonction $g$ est dérivable sur $I_n$, et pour tout $x \in I_n$, $g'(x) = \tan^2(x)$. Ainsi $g'(x) > 0$ pour tout $x \neq n\pi$, et $g'(n\pi) = 0$. $g$ est donc **strictement croissante** sur $I_n$.
   - On a $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+n\pi} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+n\pi} g(x) = -\infty$.

   Par le théorème de la bijection, $g$ réalise une bijection de $I_n$ sur $\mathbb{R}$. L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $I_n$ qu'on note $x_n$ :

$$\tan(x_n) = x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{\pi}{2}+n\pi \leq x_n \leq \frac{\pi}{2}+n\pi$, soit encore $-\frac{1}{2n}+1 \leq \frac{x_n}{n\pi} \leq \frac{1}{2n}+1$. Par le théorème des gendarmes, $\lim \frac{x_n}{n\pi}$ existe et vaut 1. En d'autres termes, $x_n \sim n\pi$.
3. Posons $y_n = x_n - n\pi$. On a par $(i)$ que $y_n = o(n\pi)$, et de plus $y_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On remplace dans l'équation définissant $x_n$ :

$$\tan(y_n) = \tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n.$$

   En appliquant arctan, on obtient :

$$y_n = \arctan(x_n) \to \pi/2 \text{ car } \lim x_n = +\infty.$$

D'où $y_n \sim \dfrac{\pi}{2}$, ce qui s'écrit aussi $y_n - \frac{\pi}{2} = o(1)$.

4. Posons à présent $z_n = y_n - \frac{\pi}{2} = o(1)$, on a :

$$\tan(z_n) = \tan(y_n - \frac{\pi}{2}) = \frac{-1}{\tan(y_n)} = \frac{-1}{x_n} \sim \frac{-1}{n\pi}.$$

Or $z_n = o(1)$, donc $\tan(z_n) \sim z_n$. On conclut ainsi que $z_n \sim \dfrac{-1}{n\pi}$. Cela se réécrit de la manières suivante :

$$x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{-1}{n\pi} + o\left(\frac{-1}{n\pi}\right)$$

soit encore :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

---

# Fonctions convexes

## Exercice 0.17 (★)

Établir les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in [0,1],\ x\ln(2) \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. $\forall x \in [0,1],\ x+1 \leq \exp(x) \leq (e-1)x+1$.
3. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \dfrac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$.
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in [0,1],\ a^t b^{1-t} \leq ta + (1-t)b$.

---

## Exercice 0.18 (★)

1. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe et $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
2. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ une fonction. Montrer que si $\ln \circ f$ est convexe alors $f$ est convexe.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$. Puisque $f$ est convexe, on a :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

On obtient en composant par $g$ croissante :

$$g \circ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq g\left(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\right).$$

Or $g$ est elle-même convexe, d'où :

$$g\left(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\right) \leq \lambda g(f(x)) + (1-\lambda)g(f(y)).$$

On obtient donc :

$$g \circ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g \circ f(x) + (1-\lambda) g \circ f(y).$$

Ceci étant vrai pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$, on en déduit que $g \circ f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ (car $\mathscr{C}^2$ de dérivée seconde positive sur $\mathbb{R}$) et croissante. En appliquant la question précédente, on en déduit que $f = \exp \circ \ln \circ f$ est convexe.

---

**Exercice 0.19 (★)**
Étudier les variations de $f$. Étudier la concavité et les points d'inflexion de sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$. Tracer $\mathscr{C}_f$.

1. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 e^x$.
2. $f : x \mapsto e^{-x^2}$.
3. $f : x \mapsto \sin(x) - x\cos(x)$.

---

**Exercice 0.20 (★★)**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable.

1. Supposons $f$ majorée. Montrer que $f$ est constante.
2. Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que $c$ est un point critique de $f$ si et seulement si $f$ admet un minimum global en $c$.

---

**Exercice 0.21 (★★)**

1. Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que :
$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad \textit{(Inégalité arithmético-géométrique)}$$
2. En déduire que $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \cdots + \dfrac{x_n}{x_1} \geq n$.

---

**Exercice 0.22 (★★)**

1. Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on a :
$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k)\right)^{\frac{1}{n}}.$$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on a :
$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

---

**Exercice 0.23 (★★★★ - Inégalité des trois pentes et conséquences - ✍)**
Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que pour tout $(a, b, c) \in I^3$ tel que $a < c < b$, on a :
$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}. \qquad \textit{(Inégalité des trois pentes)}$$
Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Pour tout $x_0 \in I$, montrer que l'application $\tau_{x_0} : x \in I \setminus \{x_0\} \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante.

3. Supposons $I = \mathbb{R}$. Montrer que si $f$ est majorée, alors $f$ est constante. Ce résultat est-il encore vrai si $I = \mathbb{R}_+$ ?

4. Supposons que $I$ est un intervalle ouvert. Montrer que $f$ est dérivable à droite et à gauche en tout point $x$ de $I$ avec :
$$f'_g(x) \leq f'_d(x).$$
En déduire que la fonction $f$ est continue.

1. Montrons par exemple l'inégalité de droite (celle de gauche se montre de la même manière). Puisque $c \in [a, b]$, il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que :
$$c = \lambda a + (1 - \lambda)b.$$
Explicitons le réel $\lambda$. On a :
$$c - b = \lambda(a - b) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{c-b}{a-b} = \frac{b-c}{b-a}.$$
Puisque $f$ est convexe, on a :
$$f(c) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \quad \Rightarrow \quad f(c) - f(b) \leq \lambda(f(a) - f(b)) = \frac{b-c}{b-a}(f(a) - f(b)).$$
Ce qui se réécrit :
$$f(b) - f(c) \geq \frac{b-c}{b-a}(f(b) - f(a)) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(b) - f(c)}{b-c} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

2. Soient $x_1, x_2$ distincts de $x_0$ et tels que $x_1 < x_2$. On doit distinguer trois cas :
   - si $x_0 < x_1 < x_2$, on a par l'inégalité des trois pentes que :
   $$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$
   Ce qui se réécrit $\tau_{x_0}(x_1) \leq \tau_{x_0}(x_2)$.
   - on procède de même pour les deux autres cas $x_1 < x_0 < x_2$ et $x_1 < x_2 < x_0$.

   On a donc bien montré que $\tau_{x_0}$ est croissante.

3. Supposons $f$ non constante : il existe donc $a < b$ tel que $f(a) \neq f(b)$. Si par exemple $f(a) < f(b)$ (l'autre cas se traite de la même façon), on a :
$$0 < \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$
Comme $\tau_a$ est croissante, on en déduit que pour tout $x \geq b$ :
$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \quad \Rightarrow \quad \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \leq f(x).$$
Or on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) = +\infty$, et par théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Ce qui contredit $f$ majorée. Ainsi $f$ est bien constante.

Ce résultat est faux sur $\mathbb{R}_+$ : il suffit pour cela de prendre la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto 1 - \dfrac{1}{x}$. Elle est convexe car $\mathscr{C}^2$ et de dérivée seconde négative sur $\mathbb{R}_+$, majorée par 1 et non constante.

4. Soit $x \in I$. Par la question 2., on sait que $\tau_x$ est croissante. D'où pour tout $y < x < z$, on a :
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$
La fonction $\tau_x$ étant croissante et majorée (par $\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$) sur $I \cap ]-\infty, x[$, elle admet une limite finie en $x$. Ainsi, la limite $\displaystyle\lim_{y \to x^-} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ existe et est finie. Donc $f$ est dérivable à gauche en $x$, et on a par passage à la limite dans les inégalités :
$$f'_g(x) = \lim_{y \to x^-} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$
De même, $\tau_x$ étant croissante et minorée (par $f'_g(x)$) sur $I \cap ]x, +\infty[$. Elle admet donc une limite finie en $x$. Ainsi, la limite $\displaystyle\lim_{z \to x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ existe et est finie, et $f$ est dérivable à droite en $x$. Et on a, toujours par passage à la limite dans les inégalités :
$$f'_g(x) \leq f'_d(x).$$
Enfin, on a pour tout $x \in I$ et tout $y < x$ :
$$f(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(y - x) + f(x) \underset{y \to x}{\longrightarrow} f'_g(x) \times 0 + f(x) = f(x).$$
On a de même $\displaystyle\lim_{y \to x^+} f(y) = f(x)$. Donc $f$ est continue en $x$. Et ceci étant vrai pour tout $x \in I$, elle est continue sur $I$ tout entier.