TD0b

Analyse asymptotique, fonctions convexes

Analyse asymptotique

Exercice 0.7 (★)

Calculer les développements limités suivants en 0 :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{2+x}$ à l'ordre 4 ;
2. $x \mapsto \ln(e+x)$ à l'ordre 4 ;
3. $x \mapsto a^x + b^x$ à l'ordre 3 ;
4. $x \mapsto \cos(x) - \dfrac{\sin(x^2)}{2}$ à l'ordre 4 ;
5. $x \mapsto (1+\exp(x))^2$ à l'ordre 3.
6. $x \mapsto \sin(x)\cos(2x)$ à l'ordre 4.
7. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1-x^2}$ à l'ordre 4.
8. $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ à l'ordre 3.

Exercice 0.8 (★★)

Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \cos x$ à l'ordre 4 au voisinage de $\frac{\pi}{3}$.
2. $f : x \mapsto e^x$ à l'ordre 4 au voisinage de 1.
3. $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 0.9 (★)

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-\cos(x)-x}{(\ln(1+x))^2}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(\ln(1+x)+1-e^x)}{\sin(x)-x}$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x\ln(x)}$.

Exercice 0.10 (★)

1. À l'aide de la formule de Taylor-Young, montrer que $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)-x}{2x-2\ln(1+x)-(\sin(x))^2}$.

Exercice 0.11 (★)

1. Montrer que $x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ définit une fonction prolongeable par continuité en 0 dont le prolongement est dérivable en 0.
2. Même question avec $x \mapsto \dfrac{e^x-1}{x}$.

Exercice 0.12 (★★)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1. Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0. En déduire la tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ en 0 et leurs positions relatives.

2. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{=} x+1+\dfrac{3}{2x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Que dire de $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$?

Exercice 0.13 (★)

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $u_n=(2n-1)^3$, alors :

   ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^3)$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 8n^3$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^4)$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{n^4}{2}\right)$

2. Si $u_n=\frac{2}{n}-\frac{3}{n\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}$, alors :

   ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ ☐ $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ ☐ $u_n=\frac{2}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$

   ☐ $u_n=\frac{2}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

3. Soit (u_n) une suite réelle. Alors on a $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

4. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors :

   ☐ $u_n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n+1$ ☐ $2u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ☐ $-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n$ ☐ $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$ ☐ $u_n-v_n=o(v_n)$

   ☐ $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$ ☐ $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$

Exercice 0.14 (★★)

Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

1. $u_n=\exp\left(\dfrac{1-\sqrt{n}}{1+n}\right)-1$
2. $v_n=\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+n}$
3. $w_n=\sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n}{2^n}\right)\right)$

Exercice 0.15 (★★)

Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n=\dfrac{2^n+(-1)^n}{3n+(-1)^{n+1}}$
2. $u_n=\sqrt[n]{n}$
3. $u_n=n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$
4. $u_n=\left(\dfrac{n}{n-x}\right)^n$
5. $u_n=\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$
6. $u_n=\dfrac{3n^2+(-1)^n}{\sqrt{n^2+2}+\ln(n)}$

Exercice 0.16 (★★★)

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ que l'on notera x_n. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 0}$.

2. Montrer que $x_n\sim n\pi$.

3. Montrer que $x_n-n\pi\sim\frac{\pi}{2}$.

4. Montrer que $x_n-n\pi-\frac{\pi}{2}\sim-\frac{1}{n\pi}$. En déduire que $x_n=n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Fonctions convexes

Exercice 0.17 (★)

Établir les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in [0,1],\ x\ln(2) \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. $\forall x \in [0,1],\ x+1 \leq \exp(x) \leq (e-1)x+1$.
3. $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}],\ \dfrac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$.
4. $\forall a,b \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in [0,1],\ a^t b^{1-t} \leq ta+(1-t)b$.

Exercice 0.18 (★)

1. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe et $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
2. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ une fonction. Montrer que si $\ln \circ f$ est convexe alors f est convexe.

Exercice 0.19 (★)

Étudier les variations de f. Étudier la concavité et les points d'inflexion de sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$. Tracer $\mathscr{C}_f$.

1. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 e^x$.
2. $f : x \mapsto e^{-x^2}$.
3. $f : x \mapsto \sin(x) - x\cos(x)$.

Exercice 0.20 (★★)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable.

1. Supposons f majorée. Montrer que f est constante.
2. Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que c est un point critique de f si et seulement si f admet un minimum global en c.

Exercice 0.21 (★★)

1. Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad \textit{(Inégalité arithmético-géométrique)}$$

2. En déduire que $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \cdots + \dfrac{x_n}{x_1} \geq n$.

Exercice 0.22 (★★)

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on a :

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (1+x_k)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on a :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (a_k+b_k)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 0.23 (★★★★ - Inégalité des trois pentes et conséquences - ✍)
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que pour tout $(a, b, c) \in I^3$ tel que $a < c < b$, on a :
$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}. \qquad \textit{(Inégalité des trois pentes)}$$
Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Pour tout $x_0 \in I$, montrer que l'application $\tau_{x_0} : x \in I \setminus \{x_0\} \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante.

3. Supposons $I = \mathbb{R}$. Montrer que si f est majorée, alors f est constante. Ce résultat est-il encore vrai si $I = \mathbb{R}_+$?

4. Supposons que I est un intervalle ouvert. Montrer que f est dérivable à droite et à gauche en tout point x de I avec :
$$f'_g(x) \leq f'_d(x).$$
En déduire que la fonction f est continue.