TD1

# Calcul matriciel

## Opérations matricielles

### Exercice 1.1 (★ - Matrices stochastiques - ✍)

On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *stochastique* si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \geq 0$ est un réel positif et si $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. On note $\mathscr{S}\mathscr{T}$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

1. Donner des exemples de matrices stochastiques.
2. Soit $\lambda \in [0,1]$. Montrer que si $A$ et $B$ appartiennent à $\mathscr{S}\mathscr{T}$, alors $\lambda A + (1-\lambda)B$ est dans $\mathscr{S}\mathscr{T}$ également.
   *Un ensemble satisfaisant une telle propriété est dit convexe.*
3. (a) Notons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que : $A \in \mathscr{S}\mathscr{T} \iff \begin{cases} \forall i,j, a_{i,j} \geq 0 \\ AX = X \end{cases}$.
   (b) En déduire que si $A$ et $B$ sont stochastiques, alors $A \times B$ est stochastique.

---

### Exercice 1.2 (★★ - Produit de matrices élémentaires - ✍)

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit pour tout $1 \leq i,j \leq n$ la matrice $E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ où l'unique coefficient non nul égal à 1 est en position $(i,j)$. Les $n \times p$ matrices $E_{i,j}$ sont appelées *matrices élémentaires*.

Montrer la formule suivante :

$$E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$$

où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker : $\delta_{j,k} = 1$ si $j = k$, 0 si $j \neq k$.

---

### Exercice 1.3 (★★★ - Centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ - ✍)

On considère l'ensemble suivant (appelé le *centre de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) :

$$\mathscr{Z}_n = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\}.$$

1. Proposer deux matrices appartenant à $\mathscr{Z}_n$.
2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ appartient-elle à $\mathscr{Z}_2$ ?
3. On souhaite déterminer l'ensemble $\mathscr{Z}_n$. Considérons pour cela une matrice $M$ appartenant à $\mathscr{Z}_n$.
   (i) Pour tout $1 \leq i,j \leq n$, calculer $E_{i,j} \times M$ et $M \times E_{i,j}$.
   (ii) En déduire que $M$ est une matrice scalaire, c'est à dire de la forme $\lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (iii) Conclure.

---

**Exercice 1.4 (★★★ - Matrices triangulaires supérieures strictes - ✍)**
Le but de cet exercice est de montrer que toute matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'ordre $\leq n$.

1. Soient $k \geq 0$ et notons $\mathscr{T}_k^+(\mathbb{K})$ l'ensemble de matrices $A = (a_{i,j})$ telles que :
$$a_{i,j} = 0 \text{ si } i + k > j.$$
   (i) Identifier $\mathscr{T}_0^+(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_1^+(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_n^+(K)$
   (ii) Soient $k, l \geq 1$. Montrer que si $A \in \mathscr{T}_k^+(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{I}_l^+(\mathbb{K})$, alors $A \times B \in \mathscr{T}_{k+l}^+(\mathbb{K})$.
2. Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente, d'ordre de nilpotence $\leq n$.
3. La réciproque est-elle vraie, c'est à dire une matrice nilpotente est-elle nécessairement triangulaire supérieure stricte ?

1. Soient $k \geq 0$ et notons $\mathscr{T}_k^+(\mathbb{K})$ l'ensemble de matrices $A = (a_{i,j})$ telles que :
$$a_{i,j} = 0 \text{ si } i + k > j.$$
   (i) Par définition, $\mathscr{T}_0^+(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})$ telles que :
$$a_{i,j} = 0 \text{ si } i > j$$
   ce qui correspond aux matrices triangulaires supérieures :
$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$
   De même, $\mathscr{T}_1^+(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})$ telles que :
$$a_{i,j} = 0 \text{ si } i > j - 1$$
   ce qui correspond aux matrices triangulaires supérieures strictes :
$$\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Enfin, $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})$ telles que :
$$a_{i,j} = 0 \text{ si } i > j - n$$
   ce qui est toujours satisfait. Donc $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ est l'ensemble réduit à la matrice nulle.
   (ii) Soient $k, l \geq 1$ et $A \in \mathscr{T}_k^+(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{I}_l^+(\mathbb{K})$. Alors on a :
$$a_{i,j} = 0 \text{ si } i + k > j \quad \text{ et } b_{i,j} = 0 \text{ si } i > j - l.$$
   On souhaite montrer que $A \times B \in \mathscr{T}_{k+l}^+(\mathbb{K})$, c'est à dire que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a :
$$[A \times B]_{i,j} = 0 \text{ si } i + k > j - l.$$

Or on a pour un tel couple $(i,j)$ :

$$[A\times B]_{i,j}=\sum_{r=1}^{n}a_{i,r}b_{r,j}=\sum_{r=1}^{i+k-1}\underbrace{a_{i,r}}_{=0}b_{r,j}+\sum_{r=i+k}^{n}a_{i,r}\underbrace{b_{r,j}}_{=0\text{ car }r\geq i+k>j-l}=0$$

D'où le résultat.

2. Soit $A$ une matrice triangulaire supérieure stricte. On a donc $A\in\mathscr{T}_1^+(\mathbb{K})$. En utilisant le résultat de la question précédente, on en déduit par une récurrence immédiate que :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad A^k\in\mathscr{T}_k^+(\mathbb{K}).$$

En particulier, on a donc $A^n\in\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})=\{0_n\}$. Donc on a bien $A$ nilpotente, d'ordre de nilpotence $\leq n$.

3. C'est bien sûr faux, la matrice nilpotente $\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ avait par exemple été donnée en cours.

---

# Méthode du pivot

### Exercice 1.5 (★)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires homogènes suivants :

$$(1)\ \begin{cases}x+y+2z=0\\x-y-z=0\\x+z=0\end{cases}\qquad(2)\ \begin{cases}x-3y+z=0\\2x+y+z=0\\x+11y-z=0\end{cases}\qquad(3)\ \begin{cases}3x+4y+z+2t=0\\6x+8y+2z+6t=0\\9x+12y+3z+10t=0\end{cases}$$

---

### Exercice 1.6 (★)
1. Résoudre le système $\begin{cases}x+y+z=0\\2x+y+2z=0\\x+2y+z=0\end{cases}$

2. On considère le système $(S)$ $\begin{cases}x+y+z=3\\2x+y+2z=5\\x+2y+z=4\end{cases}$

   Vérifier que $(1,1,1)$ est solution de $(S)$ et en déduire toutes les solutions de $(S)$.

---

### Exercice 1.7 (★)
Calculer le rang et l'inverse s'il existe des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\ ;\ C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\1&3&2\end{pmatrix}\ ;\ D=\begin{pmatrix}3&2&-1\\1&-1&1\\2&-2&1\end{pmatrix}\ ;\ E=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

---

### Exercice 1.8 (★★)
Déterminer le rang des matrices suivantes, en discutant suivant les valeurs du paramètre réel $\alpha$ :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1+\alpha\\1&1&-\alpha^2\end{pmatrix}.\qquad B=\begin{pmatrix}\alpha&1&1\\1&\alpha&1\\1&1&\alpha\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\1&2&\alpha&2\\2&\alpha&2&3\end{pmatrix}$$

---

### Exercice 1.9 (★★★ - Matrices à diagonale strictement dominante - ✍)
Soit $A=(a_{i,j})\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}|>\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$.

Soit $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX=0$, et soit $i_0\in[\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}|=\max_{i\in[\![1,n]\!]}|x_i|$.

Montrer que $x_{i_0}=0$, et en déduire que $A$ est inversible.

Soit $A=(a_{i,j})\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}|>\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$.
Soit $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX=0$, et soit $i_0\in[\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}|=\max_{i\in[\![1,n]\!]}|x_i|$.
Montrons que $x_{i_0}=0$. Puisque $AX=0$, alors en considérant la $i_0$-ème ligne, on obtient :

$$a_{i_0,1}x_1+\cdots+a_{i_0,i_0}x_{i_0}+\cdots+a_{i_0,n}x_n=0.$$

Ce qui se réécrit :

$$a_{i_0,i_0}x_{i_0}=-\sum_{i\neq i_0}a_{i_0,i}x_i.$$

Prenons la valeur absolue de cette expression, et majorons par l'inégalité triangulaire :

$$|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}|=\left|-\sum_{i\neq i_0}a_{i_0,i}x_i\right|\leq\sum_{i\neq i_0}|a_{i_0,i}||x_i|\leq\sum_{i\neq i_0}|a_{i_0,i}||x_{i_0}|$$

Supposons $X\neq 0_{n,1}$, alors $x_{i_0}\neq 0$ et on aurait en divisant par $x_{i_0}$ l'expression précédente :

$$|a_{i_0,i_0}|\leq\sum_{i\neq i_0}|a_{i_0,i}|$$

Ce qui contredirait que $A$ est à diagonale strictement dominante.
On a donc montré que si $AX=0$, alors $X=0$. Or c'est l'une des caractérisations de $A$ inversible. Ainsi une matrice à diagonale strictement dominante est toujours inversible.

---

# Trace d'une matrice carrée

**Exercice 1.10 (★)**
Montrer qu'il n'existe pas deux matrices $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB-BA=I_n$.

---

**Exercice 1.11 (★★ - ✍)**
Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $Tr({}^tAA)=0$ si et seulement si $A=0_n$.

On a :

$$Tr({}^tAA)=\sum_{i=1}^n[{}^tAA]_{i,i}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n[{}^tA]_{i,j}[A]_{j,i}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n[A]_{j,i}[A]_{j,i}.$$

Ainsi $Tr({}^tAA)=0$ équivaut à $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n[A]_{j,i}^2=0$. Comme c'est une somme de termes positifs, elle est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, c'est à dire :

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\quad [A]_{j,i}=0,$$

soit encore $A=0$. D'où le résultat.

**À retenir pour plus tard.**
Ce calcul réapparaitra un peu plus tard lorsqu'on définira sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ le produit scalaire $\langle A,B\rangle=\mathrm{Tr}({}^tAB)$.

# Matrices semblables

**Exercice 1.12 (★ - Matrices semblables - ✍)**

1. Montrer les propriétés suivantes pour des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ :
   - *Réflexivité* $A$ est semblable à $A$
   - *Symétrie* $[A$ est semblable à $B] \Leftrightarrow [B$ est semblable à $A]$
   - *Transitivité* $[A$ est semblable à $B]$ et $[B$ est semblable à $C] \Rightarrow [A$ est semblable à $C]$

   On dit que “être semblable à” est une *relation d'équivalence.*

2. Montrer que si $A$ et $B$ sont inversibles et semblables, alors $A^{-1}$ et $B^{-1}$ sont aussi semblables.

# Polynômes d'une matrice

**Exercice 1.13 (★)**
Calculer $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ avec :

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ;
- $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ ;
- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

**Exercice 1.14 (★)**
Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P = X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de $A$.
2. En déduire que $A$ est inversible et exprimer son inverse $A^{-1}$ comme un polynôme en $A$.

**Exercice 1.15 (★★)**
Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calcul des puissances de $A$ à l'aide d'un polynôme annulateur.
   (a) Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de $A$.
   (b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{R}$ tels que $A^p = \alpha_p A + \beta_p I_3$.
   (c) Déterminer une relation de récurrence satisfaite par $\alpha_p$ et $\beta_p$. En déduire $\alpha_p$ et $\beta_p$ en fonction de $p$.
   (d) En déduire $A^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
2. Calcul des puissances de $A$ par la formule du binôme.
   (a) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $J^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire $A^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

**Exercice 1.16 (★★)**
On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P = X^3 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de $B$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tels que :
$$X^n = PQ_n + a_n X^2 + b_n X + c_n.$$
3. Déterminer $a_n, b_n, c_n$ en fonction de $n$.
4. En déduire l'expression de $A^n$ en fonction de $n$.

---

**Exercice 1.17 (★)**
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P$ est inversible et calculer $P^{-1}$.
2. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ ainsi que $D^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Mêmes questions avec les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

---

**Exercice 1.18 (★★★ - Polynôme annulateur d'une matrice diagonale - ✍)**
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ $(r \leqslant n)$ des réels distincts deux à deux et $(m_1, \dots, m_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que :
$$m_1 + \cdots + m_r = n$$
On pose $D = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1 \text{ termes}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{m_2 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{m_r \text{ termes}}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que :
$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(D) = \mathrm{diag}(\underbrace{P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_1)}_{m_1 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{P(\lambda_r), \dots, P(\lambda_r)}_{m_r \text{ termes}})$$
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $P$ soit un polynôme annulateur de $D$.
3. On suppose que $A$ est semblable à $D$. Déterminer un polynôme annulateur de $A$.
4. À l'aide de l'exercice précédent, déterminer un polynôme annulateur de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   En déduire que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.

---

**Exercice 1.19 (★★★ - QSP ESCP 2016)**
Soit $N$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$ nilpotente, i.e. telle qu'il existe $p \geq 1$ tel que $N^p = 0$.

- Montrer que la matrice $A = I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse.
- Montrer que $I_n - A^{-1}$ est nilpotente.

> 1. On va se servir de l'identité suivante, valable seulement si $A$ et $B$ commutent :
> $$\forall p \geq 1, \quad A^p - B^p = (A - B)\left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{p-1-k}\right) = (A - B)\left(\sum_{k=0}^{n-1} A^{p-1-k} B^k\right).$$
> On sait ici que $N^p = 0_n$. D'où :
> $$I_n = I_n^p - N^p = (I_n - N)\left(\sum_{k=0}^{p-1} N^k I_n^{p-1-k}\right) = (I_n - N)(I_n + N + N^2 + \cdots + N^{p-1}).$$
> Ainsi $A = I_n - N$ est bien inversible, d'inverse $A^{-1} = I_n + N + N^2 + \cdots + N^{p-1}$.

2. Si $p=1$, alors $N=0$ et $I_n - A^{-1} = 0_n$ est bien nilpotente. Si $p \geq 2$, on a :

$$I_n - A^{-1} = -N - N^2 - \cdots - N^{p-1} = N(-I_n - N - \cdots - N^{p-2}).$$

Posons $M = -I_n - N - \cdots - N^{p-2}$. $M$ est un polynôme en $N$, donc commute avec $N$, de sorte que :

$$(I_n - A^{-1})^p = (N \times M)^p = \underbrace{(N \times M) \times \cdots \times (N \times M)}_{p\text{fois}} \underset{M \text{ et } N \text{ commutent}}{=} N^p M^p = 0_n.$$

Ainsi $I_n - A^{-1}$ est bien nilpotente.