TD10

Variables aléatoires à densité

Loi d'une variable aléatoire à densité

Exercice 10.1 (★)

On suppose que X est une variable aléatoire suivant la loi $\gamma(3)$. Déterminer sa fonction de répartition.

Exercice 10.2 (★★ - D'après Ecricome 2015)

1. Déterminer un réel a tel que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{a}{x\ln^2(x)} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ soit une densité.

   Dans toute la suite, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X.
3. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
4. Calculer les probabilités $P(0 \leq X \leq 4)$ et $P(X \geq 5/2)$.

Exercice 10.3 (★★)

1. On suppose que X est une variable aléatoire de loi $\mathscr{N}(0,1)$.
   À l'aide de la table de valeurs de Φ, déterminer une valeur approchée des probabilités suivantes :
   $$P(X \leq 0,23)\ ,\ P(X \geq 0,82)\ ,\ P(-3 \leq X \leq 1)\ ,\ P(X^2 > 0,82^2).$$
2. Reprendre la question précédente en supposant cette fois que $X \hookrightarrow \mathscr{N}(-1,4)$.
3. On suppose que $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$. Déterminer $x \in \mathbb{R}$ pour que :
   $$P(X \leq x) = 0,95\ ;\ P(X \geq x) = 0,10\ ;\ P(|X| \leq x) = 0,90\ ;\ P(5+3X > x) = 0,01.$$
4. On suppose maintenant que X suit une loi normale.
   Déterminer l'espérance et la variance de X sachant $P(X < -1) = 0,05$ et $P(X > 3) = 0,12$.

Exercice 10.4 (★ - Calcul d'intégrales gaussiennes à l'aide de lois normales)

En utilisant des lois normales bien choisies, calculer les valeurs des intégrales suivantes :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t^2-8t)}\,\mathrm{d}t, \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2-4t-8}\,\mathrm{d}t, \quad K = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2-4t-8}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 10.5 (★★)

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qui suit une loi normale centrée réduite. Soit Y une variable aléatoire définie sur le même espace, indépendante de X, et telle que $P(Y=1) = p$ et $P(Y=-1) = 1-p$. Montrer que $Z = XY$ a la même loi que X.

> On va chercher la fonction de répartition de Z. Soit pour cela $x \in \mathbb{R}$. On a :
> $$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(XY \leq x).$$
> On applique la formule des probabilités totales avec le SCE $([Y=1],[Y=-1])$:
> $$\begin{aligned} F_Z(x) &= P([XY \leq x] \cap [Y=1]) + P([XY \leq x] \cap [Y=-1]) = P([X \leq x] \cap [Y=1]) + P([-X \leq x] \cap [Y=-1]) \\ &= P(X \leq x)P(Y=1) + P(X \geq -x)P(Y=-1) \quad \text{par indépendance des variables } X \text{ et } Y \\ &= pP(X \leq x) + (1 - P(X < -x))(1-p) \\ &= pP(X \leq x) + (1 - P(X \leq -x))(1-p) \quad \text{car } X \text{ est continue} \\ &= p\Phi(x) + (1-\Phi(-x))(1-p) = p\Phi(x) + (1-p)\Phi(x) = \Phi(x). \end{aligned}$$

Ainsi $F_Z = \Phi$, donc Z suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 10.6 (★★★ - QSP ESCP 2006)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, de densité f. On définit une fonction G sur $\mathbb{R}$ par
$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq xt) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer la fonction G.
2. Montrer que G est la fonction de répartition d'une variable à densité Y, et donner une densité g de Y.

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq xt) f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} F(xt)\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t,$$
où F est la fonction de répartition de X. En particulier F est nulle sur $]-\infty, 0]$. Donc pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \leq 0$, $tx \leq 0$ et on a $F(xt) = 0$. Ainsi on a pour tout $x \leq 0$, $G(x)$ existe bien et vaut 0.

   Supposons maintenant $x > 0$. Alors $F(xt) = 1 - e^{-\lambda xt}$ et on a :
$$G(x) = \int_{0}^{+\infty} (1 - e^{-\lambda xt})\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(x+1)t}\,\mathrm{d}t$$
   On reconnait l'intégrale de référence $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ qui converge si et seulement si $\alpha > 0$, et qui vaut alors $\dfrac{1}{\alpha}$ (densité d'une loi exponentielle de paramètre α). Ainsi les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(x+1)t}\,\mathrm{d}t$ convergent puisque $\lambda > 0$ et $\lambda(x+1) > 0$. Donc pour tout $x > 0$, $G(x)$ existe bien, et on a par linéarité de l'intégrale (tout converge) :
$$G(x) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t - \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(x+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda(x+1)} = \frac{x}{x+1}.$$
   Ainsi on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

2. On ne sait pas que G est une fonction de répartition, donc il va falloir montrer tous les points suivants :
   - G est croissante : en effet elle est constante sur $]-\infty, 0]$, et sur $]0, +\infty[$ on a :
   $$G(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$
   $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ étant décroissante sur $]0, +\infty[$, G est bien croissante sur cet intervalle, et donc sur $\mathbb{R}$.
   - $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$.
   - G est continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$.

   On peut conclure déjà de ces trois points que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle Y. Montrons que Y est à densité :

- G est continue sur $\mathbb{R}$: il suffit de regarder la continuité en 0. On a :

$$\lim_{x\to 0^-} G(x) = 0 = G(0) = \lim_{x\to 0^+} G(x)$$

Donc G est continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$.

- G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

Ainsi on peut conclure que Y est à densité. Pour déterminer une densité, on dérive G : pour tout $x \neq 0$, on a :

$$G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Une densité de Y est donc $g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, la valeur en 0 étant choisie arbitrairement.

Exercice 10.7 (★★★★ - QSP HEC 2008)

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Montrer que la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = F(x+1) - F(x)$$

est une densité de probabilité.

Pour montrer que g est une densité de probabilité, on doit vérifier les trois points suivants :

- g est continue sauf ENFP : c'est bien le cas ici car F est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction de répartition d'une variable à densité. g est donc continue comme composée de fonctions continues.

- g est positive sur $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = F(x+1) - F(x) \geq 0$ par croissance de la fonction de répartition F.

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1 : c'est un peu plus délicat. Prenons pour commencer deux réels $a < b$. On a par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b F(t+1)\,\mathrm{d}t - \int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a+1}^{b+1} F(u)\,\mathrm{d}u - \int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t \qquad (*)$$

en effectuant dans la première intégrale le changement de variables affine (donc licite) $u = t+1$. Par relation de Chasles, on en déduit que :

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_b^{b+1} F(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{a+1} F(t)\,\mathrm{d}t$$

Faisons maintenant le raisonnement suivant : on sait que $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$. Quand b est grand, on devrait donc avoir $F(t) \approx 1$ sur $[b, b+1]$, de sorte qu'on peut espérer avoir $\int_b^{b+1} F(t)\,\mathrm{d}t \approx \int_b^{b+1} 1\,\mathrm{d}t = 1$ pour b grand. Maintenant qu'on a deviner la limite probable, montrons le plus rigoureusement. On a pour tout $b > 0$:

$$\begin{aligned} \left|\int_b^{b+1} F(t)\,\mathrm{d}t - 1\right| &= \left|\int_b^{b+1} F(t)\,\mathrm{d}t - \int_b^{b+1} 1\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_b^{b+1} F(t) - 1\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_b^{b+1} |F(t) - 1|\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or on a $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$, ce qui se réécrit avec des quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \quad t \geq B \Rightarrow |F(t) - 1| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que pour tout $b \geq B$, on a $|F(t) - 1| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [b, b+1]$, de sorte que :

$$\left| \int_b^{b+1} F(t)\,\mathrm{d}t - 1 \right| \leq \int_b^{b+1} |F(t) - 1|\,\mathrm{d}t \leq \int_b^{b+1} \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon.$$

Par définition de la limite, on a donc bien montré que $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_b^{b+1} F(t)\,\mathrm{d}t = 1$. On peut donc passer à la limite quand $b \to +\infty$ dans $(*)$. $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc et vaut :

$$\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \int_a^{a+1} F(t)\,\mathrm{d}t.$$

On montre exactement de la même manière que $\lim\limits_{a \to +\infty} \int_a^{a+1} F(t)\,\mathrm{d}t = 0$. On peut donc conclure que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut :

$$\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = 1 - 0 = 1.$$

On peut donc conclure de ces trois points que g est bien une densité de probabilité.

Fonction d'une variable aléatoire à densité

Exercice 10.8 (★★)
Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X.
2. Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X.
3. Montrer que X n'admet pas d'espérance. X admet-elle une variance ?
4. (a) On pose $Y = -3X + 2$. Justifier que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y. Y admet-elle une espérance ?
   (b) On pose $Z = 1 + \sqrt{X}$. Montrer que Z est une variable à densité et déterminer une densité de Z. Montrer que Z admet une espérance et la déterminer. Z admet-elle une variance ?

Exercice 10.9 (★★)
Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

1. Soit $\lambda > 0$. On pose $X = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$. Déterminer la loi de X.
2. Soient n et m deux entiers tels que $n \leq m$. On pose $Y = n + \lfloor (m - n + 1)U \rfloor$. Montrer que $Y \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket n, m \rrbracket)$.
3. On rappelle que la fonction `rand()` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathscr{U}([0, 1])$. Écrire des fonctions `exponentielle(lambda)` et `uniforme(n,m)` simulant respectivement une loi $\mathscr{E}(\lambda)$ et une loi $\mathscr{U}(\llbracket n, m \rrbracket)$ à partir de la fonction `rand()`.

Exercice 10.10 (★★)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

1. On pose $Y = \lfloor X \rfloor + 1$. Montrer que Y suit une loi usuelle que l'on précisera.
2. On pose $Z = \frac{1}{X}$. Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.

Exercice 10.11 (★★)
Pour tout réel t, on pose $f(t) = e^{-2|t|}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f, et $Y = X^2$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues, et elle est positive par positivité de l'exponentielle. Soit $a < b$ deux réels. On a par relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^0 e^{-2|t|}\,\mathrm{d}t + \int_0^b e^{-2|t|}\,\mathrm{d}t = \int_a^0 e^{2t}\,\mathrm{d}t + \int_0^b e^{-2t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_a^0 + \left[-\frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^b = \frac{1}{2}\left(1 - e^{2a} + 1 - e^{-2b}\right).\end{aligned}$$

On a $\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1 - e^{2a} + 1 - e^{-2b}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{2a}\right)$, puis $\lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2}\left(1 - e^{2a} + 1\right) = 1$. On peut donc conclure que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. Ainsi f est bien une densité de probabilités.

2. Soit X une variable aléatoire continue de densité f. On pose $Y = X^2$.
   - **Support de Y.** On a $X(\Omega) = \mathbb{R}$, donc $Y = X^2 \geq 0$ et $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$. On en déduit que pour tout $x < 0$, on a $P(Y \leq x) = 0$.
   - **Fonction de répartition de Y.** On a déjà que pour tout $x < 0$, on a $F_Y(x) = 0$. Soit à présent $x \geq 0$. On a :

   $$\begin{aligned}F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) \\ &= P(X \leq \sqrt{x}) - P(X < \sqrt{x}) = P(X \leq \sqrt{x}) - P(X \leq \sqrt{x}) \text{ car } X \text{ continue} \\ &= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}).\end{aligned}$$

   On obtient donc finalement :

   $$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

   - **Y est à densité.** F_Y est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ en tant que composées de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur ces intervalles (on notera que F_X est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de f continue sur $\mathbb{R}$). Reste à montrer que F_Y est continue en 0 :

   $$F_Y(0) = F_X(0) - F_X(0) = 0 \lim_{x\to0^+} F_Y(x) = \lim_{x\to0^-} F_Y(x).$$

   Donc F_Y est bien continue sur $\mathbb{R}$. On peut donc conclure que Y est une variable à densité.
   - **Densité de Y.** Pour tout $x \neq 0$, on a :

   $$F_Y'(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} F_X'(\sqrt{x}) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} F_X'(-\sqrt{x}) = \dfrac{e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

   Une densité de Y est donc :

   $$f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

   la valeur en 0 étant arbitrairement choisie.

Exercice 10.12 (★★★★ - QSP HEC 2013)

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $]-1,1[$.

1. Trouver toutes les fonctions ϕ définies, continues et strictement monotones sur $]-1,1[$ telles que la variable aléatoire $Y = \phi(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.

2. En déduire une fonction paire ψ définie sur $]-1,1[$, telle que la variable aléatoire $\psi(X)$ suive aussi la loi exponentielle de paramètre 1.

1. Puisque ϕ est continue et strictement monotone sur $]-1,1[$. Elle réalise donc une bijection de I sur un intervalle ouvert $J =]a,b[$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. De plus, puisque $Y = \phi(X)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1, on a que $J =]0,+\infty[$.

   Commençons par le cas où ϕ est strictement croissante. On a pour tout $x > 0$:
   $$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\phi(X) \leq x) = P(X \leq \phi^{-1}(x)) = F_X(\phi^{-1}(x))$$
   Or on a pour tout $t \in]-1,1[$, $F_X(t) = \dfrac{t-(-1)}{1-(-1)} = \dfrac{t+1}{2}$. Puisque de plus $\phi^{-1}(x) \in]-1,1[$, on en déduit que :
   $$F_Y(x) = \frac{\phi^{-1}(x)+1}{2}.$$
   Or Y suit une loi $\mathscr{E}(1)$ par hypothèse, donc on a :
   $$F_Y(x) = 1 - e^{-x}.$$
   On en déduit donc que $1 - e^{-x} = \dfrac{\phi^{-1}(x)+1}{2}$, soit encore $\phi^{-1}(x) = 1 - 2e^{-x}$. On cherche alors ϕ en résolvant pour $x > 0$ et $t \in]-1,1[$:
   $$t = 1 - 2e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1-t}{2} \Leftrightarrow -x = \ln\left(\frac{1-t}{2}\right)$$
   $$\Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{1-t}{2}\right)$$
   Ainsi on obtient dans ce cas $\phi(t) = -\ln\left(\dfrac{1-t}{2}\right)$.

   Réciproquement, on vérifie par une étude de fonction que ϕ est bien continue strictement croissante de $]-1,1[$ dans $]0,+\infty[$. Et d'après les calculs précédents, on a bien pour tout $x > 0$:
   $$F_Y(x) = \frac{\phi^{-1}(x)+1}{2} = \frac{1-2e^{-x}+1}{2} = 1 - e^{-x}.$$
   Et pour $x \leq 0$, $F_Y(x) = P(\phi(X) \leq x) = 0$ car $\phi(X) > 0$. On peut donc conclure que $\phi : t \in]-1,1[\mapsto -\ln\left(\dfrac{1-t}{2}\right)$ est l'unique fonction continue et strictement croissante répondant au problème.

   Supposons à présent que ϕ est strictement décroissante. Alors pour tout $x > 0$, on obtient en reprenant les calculs :
   $$F_Y(x) = P(\phi(X) \leq x) = P(X \geq \phi^{-1}(x)) = 1 - P(X < \phi^{-1}(x)) = 1 - F_X(\phi^{-1}(x))$$
   car X est à densité. Comme pour tout $t \in]-1,1[$, $F_X(t) = \dfrac{t+1}{2}$ et que $\phi^{-1}(x) \in]-1,1[$, on obtient :
   $$F_Y(x) = 1 - \frac{\phi^{-1}(x)+1}{2} = \frac{1-\phi^{-1}(x)}{2}.$$

Or Y suit une loi $\mathscr{E}(1)$ par hypothèse, donc on a :

$$F_Y(x) = 1 - e^{-x}.$$

On en déduit donc que $1 - e^{-x} = \dfrac{1-\phi^{-1}(x)}{2}$, soit encore $\phi^{-1}(x) = 2e^{-x} - 1$. On cherche alors ϕ en résolvant pour $x > 0$ et $t \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned} t = 2e^{-x} - 1 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1+t}{2} \Leftrightarrow -x = \ln\left(\frac{1+t}{2}\right) \\ \Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{1+t}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi on obtient dans ce cas $\phi(t) = -\ln\left(\dfrac{1+t}{2}\right)$. Et on vérifie réciproquement que ϕ est bien strictement décroissante et que $Y = \phi(X)$ suit bien une loi $\mathscr{E}(1)$.

2. On va chercher une telle fonction $\psi :]-1,1[\to [0,+\infty[$ paire et telle que sa restriction $\tilde{\psi}$ à $[0,1[$ réalise une bijection continue croissante strictement de $[0,1[$ sur $[0,+\infty[$.

   Posons $Y = \psi(X)$. Y est une variable aléatoire d'après le cours. Pour tout $y \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(\psi(X) \leq y) = P(-\tilde{\psi}^{-1}(y) \leq X \leq \tilde{\psi}^{-1}(y)) \\ &= P(X \leq \tilde{\psi}^{-1}(y)) - P(X < -\tilde{\psi}^{-1}(y)) = P(X \leq \tilde{\psi}^{-1}(y)) - P(X \leq -\tilde{\psi}^{-1}(y)) \end{aligned}$$

   car X est à densité. Comme de plus $\tilde{\psi}^{-1}(y) \in [0,1[$ et que $F_X(x) = \dfrac{x+1}{2}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on obtient :

$$F_Y(y) = \frac{\tilde{\psi}^{-1}(y)+1}{2} - \frac{1-\tilde{\psi}^{-1}(y)}{2} = \tilde{\psi}^{-1}(y).$$

   On cherche ψ de telle sorte que $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$, soit donc :

$$\tilde{\psi}^{-1}(y) = 1 - e^{-y}.$$

   On résout pour tout $y \geq 0$ et $x \in [0,1[$:

$$x = 1 - e^{-y} \Leftrightarrow e^{-y} = 1 - x \Leftrightarrow y = -\ln(1-x)$$

   Ainsi on obtient que pour tout $x \in [0,1[$, $\psi(x) = \tilde{\psi}(x) = -\ln(1-x)$. Comme de plus ψ est paire sur $]-1,1[$, on a pour tout $x \in]-1,0]$:

$$\psi(x) = \psi(-x) = -\ln(1-(-x)) = -\ln(1-x).$$

   On obtient donc que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\psi(x) = -\ln(1-|x|)$$

   Montrons réciproquement qu'une telle fonction convient, c'est à dire que $\psi : x \in]-1,1[\mapsto -\ln(1-|x|)$ est paire et que $Y = \psi(X) \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$. Cette fonction est clairement paire, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(-\ln(1-|X|) \leq x) = P(\ln(1-|X|) \geq -x) = P(1-|X| \geq e^{-x}) \quad \text{car exp croissante} \\ &= P(|X| \leq 1 - e^{-x}) \end{aligned}$$

   On résout :

$$1 - e^{-x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0.$$

   Donc si $x < 0$, $F_Y(x) = 0$. Si $x \geq 0$, on a :

$$F_Y(x) = P(|X| \leq 1 - e^{-x}) = P(-1 + e^{-x} \leq X \leq 1 - e^{-x}) = P(X \leq 1 - e^{-x}) - P(X \leq -1 + e^{-x})$$

car X est à densité. Comme de plus $1-e^{-x} \in [0,1[$ car $x \geq 0$, et que $F_X(y) = \dfrac{y+1}{2}$ pour tout $y \in]-1,1[$, on obtient :

$$F_Y(x) = \frac{1-e^{-x}+1}{2} - \frac{1-1+e^{-x}}{2} = 1-e^{-x}.$$

Ainsi la fonction $\psi : x \in]-1,1[\mapsto -\ln(1-|x|)$ répond bien au problème.

Moments d'une variable à densité

Exercice 10.13 (★)

1. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}(]0,1[)$. Justifier l'existence de $E(\ln(X))$ et la calculer.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$. On note Φ la fonction de répartition de X. Justifier l'existence de $E(\Phi(X))$ et la calculer.

Exercice 10.14 (★)

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} -\ln(x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que X admet des moments de tout ordre et les calculer.

Exercice 10.15 (★★)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi γ de paramètre ν.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X admet un moment d'ordre n, et calculer ce moment.
2. On pose $Y = e^X$. Montrer que Y est une variable à densité, et donner une de ses densités.
3. Montrer que Y n'admet pas d'espérance.

Exercice 10.16 (★)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

1. Déterminer la loi de $-X$ puis de $\pi(X+1)$.
2. On pose $Y = \frac{X^2}{2}$.
   (a) Montrer que Y admet une espérance et une variance et les déterminer.
   (b) Montrer que Y suit une loi usuelle que l'on précisera. Retrouver alors son espérance et sa variance.

Exercice 10.17 (★★ - Loi de Pareto et loi exponentielle)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}(a)$, $a > 0$. On pose alors $Y = e^X$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y. En déduire que Y est une variable à densité et en donner une densité.
2. À quelle condition sur a la variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? Calculer alors $E(Y)$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Y admette une variance, et lorsque cette condition est vérifiée, calculer $V(Y)$.

1. D'après le cours, Y est bien une variable aléatoire réelle.
   - **Support de Y.** On a $X(\Omega) = [0,+\infty[$, et donc $X \geq 0$, de sorte que $Y \geq 1$. Donc on a $Y(\Omega) = [1,+\infty[$ et $P(Y \leq x) = 0$ pour tout $x < 1$.

- **Calcul de F_Y.** On a déjà que pour tout $x < 1$, $F_Y(x) = 0$. Soit à présent $x \geq 1$. On a :
$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(e^X \leq x) = P(X \leq \ln(x)) = F_X(\ln(x))$$
puisque ln est croissante. De plus on a $F_X : u \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ 1 - e^{-au} & \text{si } u \geq 0 \end{cases}$ et $\ln(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$. On en déduit que :
$$F_Y(x) = 1 - e^{-a\ln(x)} = 1 - \frac{1}{x^a}.$$
La fonction de répartition de Y est donc :
$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^a} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$
- **Y à densité.** F_Y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ comme composée de fonctions continues. On étudie la continuité en 1 :
$$\lim_{x \to 1^-} F_Y(x) = 0 = F_Y(0) = \lim_{x \to 1^+} F_Y(x).$$
Donc F_Y est continue en 1, et donc sur $\mathbb{R}$. Ainsi Y est une variable à densité.
- **Densité de Y.** On a pour tout $x \neq 1$:
$$F_Y'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ -(-a)x^{-a-1} & \text{si } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{a}{x^{a+1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$
Ainsi une densité de Y est donnée par :
$$f_Y : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{a}{x^{a+1}} & \text{si } x > 1 \end{cases},$$
la valeur en 1 étant arbitrairement choisie égale à 0.

2. Y admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{a}{t^a}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge car la fonction intégrée est positive. Or on reconnait une intégrale de Riemann. Elle converge donc si et seulement si $a > 1$, et on a pour tout $B > 1$:
$$\int_1^B \frac{a}{t^a}\,\mathrm{d}t = \left[a\frac{t^{-a+1}}{-a+1}\right]_1^B = \frac{a}{a-1}\left(1 - \frac{1}{B^{a-1}}\right) \to \frac{a}{a-1}$$
quand $B \to +\infty$.

Ainsi $E(Y)$ existe si et seulement si $a > 1$, et elle vaut $\dfrac{a}{a-1}$.

3. $V(Y)$ existe si et seulement si Y admet un moment d'ordre 2, soit si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{a}{t^{a-1}}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge car la fonction intégrée est positive. C'est aussi une intégrale de Riemann, qui converge si et seulement si $a - 1 > 1$, c'est à dire $a > 2$. Et on a pour tout $B > 1$:
$$\int_1^B \frac{a}{t^{a-1}}\,\mathrm{d}t = \left[a\frac{t^{-a+2}}{-a+2}\right]_1^B = \frac{a}{a-2}\left(1 - \frac{1}{B^{a-2}}\right) \to \frac{a}{a-2}$$
quand $B \to +\infty$.

Ainsi $V(Y)$ existe si et seulement si $a > 2$, et on a par la formule de Huygens :
$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{a}{a-2} - \frac{a^2}{(a-1)^2} = \frac{a}{(a-2)(a-1)^2}.$$