

Variables aléatoires à densité

Loi d'une variable aléatoire à densité

Exercice 10.1 (★)

On suppose que X est une variable aléatoire suivant la loi $\gamma(3)$. Déterminer sa fonction de répartition.

Exercice 10.2 (★★ - D'après Ecricome 2015)

1. Déterminer un réel a tel que la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{a}{x \ln^2(x)} & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$ soit une densité.

Dans toute la suite, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X .
3. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
4. Calculer les probabilités $P(0 \leq X \leq 4)$ et $P(X \geq 5/2)$.

Exercice 10.3 (★★)

1. On suppose que X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
À l'aide de la table de valeurs de Φ , déterminer une valeur approchée des probabilités suivantes :

$$P(X \leq 0,23), P(X \geq 0,82), P(-3 \leq X \leq 1), P(X^2 > 0,82^2).$$

2. Reprendre la question précédente en supposant cette fois que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(-1, 4)$.
3. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer $x \in \mathbb{R}$ pour que :

$$P(X \leq x) = 0,95; P(X \geq x) = 0,10; P(|X| \leq x) = 0,90; P(5 + 3X > x) = 0,01.$$

4. On suppose maintenant que X suit une loi normale.
Déterminer l'espérance et la variance de X sachant $P(X < -1) = 0,05$ et $P(X > 3) = 0,12$.

Exercice 10.4 (★ - Calcul d'intégrales gaussiennes à l'aide de lois normales)

En utilisant des lois normales bien choisies, calculer les valeurs des intégrales suivantes :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t^2-8t)} dt, \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2-4t-8} dt, \quad K = \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2-4t-8} dt.$$

Exercice 10.5 (★★)

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}, P) qui suit une loi normale centrée réduite. Soit Y une variable aléatoire définie sur le même espace telle que $P(Y = 1) = p$ et $P(Y = -1) = 1 - p$. Montrer que $Z = XY$ a la même loi que X .

Exercice 10.6 (★★★ - QSP ESCP 2006)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, de densité f . On définit une fonction G sur \mathbb{R} par

$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq xt) f(t) dt.$$

1. Déterminer la fonction G .
2. Montrer que G est la fonction de répartition d'une variable à densité Y , et donner une densité g de Y .

Exercice 10.7 (★★★ - QSP HEC 2008)

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Montrer que la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = F(x+1) - F(x)$$

est une densité de probabilité.

Fonction d'une variable aléatoire à densité**Exercice 10.8 (★)**

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

On suppose que la fonction de répartition de X est la fonction définie sur \mathbb{R} par $F(x) =$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X .
2. Montrer que X n'admet pas d'espérance. X admet-elle une variance ?
3. (a) On pose $Y = -3X + 2$. Justifier que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y . Y admet-elle une espérance ?
 (b) On pose $Z = 1 + \sqrt{X}$. Montrer que Z est une variable à densité et déterminer une densité de Z . Montrer que Z admet une espérance et la déterminer. Z admet-elle une variance ?

Exercice 10.9 (★★)

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

1. Soit $\lambda > 0$. On pose $X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$. Déterminer la loi de X .
2. Soient n et m deux entiers tels que $n \leq m$. On pose $Y = n + \lfloor (m - n + 1)U \rfloor$. Montrer que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket n, m \rrbracket)$.
3. On rappelle que la fonction `rand()` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{U}([0, 1])$. Écrire des fonctions `exponentielle(lambda)` et `uniforme(n,m)` simulant respectivement une loi $\mathcal{E}(\lambda)$ et une loi $\mathcal{U}(\llbracket n, m \rrbracket)$ à partir de la fonction `rand()`.

Exercice 10.10 (★★)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

1. On pose $Y = \lfloor X \rfloor + 1$. Montrer que Y suit une loi usuelle que l'on précisera.
2. On pose $Z = \frac{1}{X}$. Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z .

Exercice 10.11 (★★)

Pour tout réel t , on pose $f(t) = e^{-2|t|}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f , et $Y = X^2$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité.

Exercice 10.12 (★★★★ - QSP HEC 2013)

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) qui suit la loi uniforme sur $] - 1, 1[$.

1. Trouver toutes les fonctions ϕ définies, continues et strictement monotones sur $] - 1, 1[$ telles que la variable aléatoire $Y = \phi(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.
2. En déduire une fonction paire ψ définie sur $] - 1, 1[$, telle que la variable aléatoire $\psi(X)$ suive aussi la loi exponentielle de paramètre 1.

Moments d'une variable à densité**Exercice 10.13 (★)**

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1[)$. Justifier l'existence de $E(\ln(X))$ et la calculer.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. On note Φ la fonction de répartition de X . Justifier l'existence de $E(\Phi(X))$ et la calculer.

Exercice 10.14 (★)

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} -\ln(x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f . Montrer que X admet des moments de tout ordre et les calculer.

Exercice 10.15 (★★)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi γ de paramètre ν .

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X admet un moment d'ordre n , et calculer ce moment.

2. On pose $Y = e^X$. Montrer que Y est une variable à densité, et donner une de ses densités.
 3. Montrer que Y n'admet pas d'espérance.
-

Exercice 10.16 (★)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

1. Déterminer la loi de $-X$ puis de $\pi(X + 1)$.
 2. On pose $Y = \frac{X^2}{2}$.
 - (a) Montrer que Y admet une espérance et une variance et les déterminer.
 - (b) Montrer que Y suit une loi usuelle que l'on précisera. Retrouver alors son espérance et sa variance.
-

Exercice 10.17 (★★ - Loi de Pareto et loi exponentielle)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$, $a > 0$. On pose alors $Y = e^X$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y . En déduire que Y est une variable à densité et en donner une densité.
 2. À quelle condition sur a la variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? Calculer alors $E(Y)$.
 3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Y admette une variance, et lorsque cette condition est vérifiée, calculer $V(Y)$.
-