

Produit scalaire et espaces euclidiens

Produit scalaire et norme euclidienne

Exercice 11.1 (★)

On considère le plan vectoriel \mathbb{R}^2 et on pose pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$:

$$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

1. Montrer que pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\langle x, x \rangle = 2(x_1 + \frac{x_2}{2})^2 + \frac{3}{2}x_2^2$.
2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 .
3. Montrer que les vecteurs $(1, 0)$ et $(1, -2)$ sont orthogonaux pour ce produit scalaire et calculer leur norme. Les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 11.2 (★ - EML 2007)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'on définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ en posant

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)(1-t^2)dt.$$

Exercice 11.3 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$.

Étudier le cas d'égalité.

Commençons par quelques rappels.

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Dans le cas général d'un espace $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ préhilbertien réel, on a :

$$\forall x, y \in E, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne dans $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

pour tout $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

En essayant de coller avec la formule à obtenir, on propose d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $x = (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$ et $y = (\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}})$. On obtient :

$$n = \left| \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \frac{1}{\sqrt{x_i}} \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i} \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} = \sqrt{1} \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} =$$

D'où en élevant au carré :

$$n^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}.$$

On a de plus égalité si et seulement si x et y sont colinéaires. Comme $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel

que $y = \alpha x$, ce qui donne :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \frac{1}{\sqrt{x_i}} = \alpha \sqrt{x_i} \quad \Rightarrow \quad 1 = \alpha x_i.$$

En sommant ces inégalités entre 1 et n , on obtient :

$$n = \alpha \sum_{i=1}^n x_i = \alpha.$$

On en déduit donc que pour tout $i = 1, \dots, n$, on a :

$$x_i = \frac{1}{n}.$$

Ainsi, on a l'égalité si et seulement si $x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$.

Exercice 11.4 (★)

On considère l'espace $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et on pose :

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g \rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
2. Établir que $\forall f \in E, \quad \left(f(1) + \int_0^1 f'(t)dt \right)^2 \leq 2 \left(f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \right)$.

1. Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E :

- **Linéarité à gauche.** Soient $f_1, f_2, g \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(1)g(1) + \int_0^1 (\lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2')(t)g'(t) dt \\ &= \lambda_1 f_1(1)g(1) + \lambda_2 f_2(1)g(1) + \int_0^1 (\lambda_1 f_1'(t) + \lambda_2 f_2'(t))g'(t) dt \quad (\text{lin. de la dérivation}) \\ &= \lambda_1 f_1(1)g(1) + \lambda_2 f_2(1)g(1) + \lambda_1 \int_0^1 f_1'(t)g'(t) dt + \lambda_2 \int_0^1 f_2'(t)g'(t) dt \quad (\text{lin. de l'intégral}) \\ &= \lambda_1 \left(f_1(1)g(1) + \int_0^1 f_1'(t)g'(t)dt \right) + \lambda_2 \left(f_2(1)g(1) + \int_0^1 f_2'(t)g'(t)dt \right) \\ &= \lambda_1 \langle f_1, g \rangle + \lambda_2 \langle f_2, g \rangle \end{aligned}$$

D'où la linéarité à gauche.

- **Symétrie.** Soient $f, g \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \langle g, f \rangle &= g(1)f(1) + \int_0^1 g'(t)f'(t)dt \\ &= f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt = \langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

D'où la symétrie, et donc également la linéarité à droite.

- **Positif.** On a pour tout $f \in E$:

$$\langle f, f \rangle = f(1)^2 + \int_0^1 \underbrace{f'(t)^2}_{\geq 0} dt \geq 0$$

par positivité de l'intégrale.

- **Défini positif.** On a pour tout $f \in E$:

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle = 0 &\Rightarrow \underbrace{f(1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\int_0^1 f'(t)^2 dt}_{\geq 0} = 0 \\ &\Rightarrow f(1)^2 = 0 \text{ et } \int_0^1 f'(t)^2 dt = 0 \end{aligned}$$

Or c'est l'intégrale d'une fonction continue et positive. Elle est nulle si et seulement si $f'(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Ainsi f est constante sur $[0, 1]$, égale à $f(1) = 0$. Donc on a bien $f = 0_E$.

2. On reconnaît ici la norme $\|f\|^2$ à droite de l'inégalité. On pense à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On doit donc identifier $g \in E$ tel que pour tout $f \in E$, on ait :

$$f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt = \langle f, g \rangle = f(1) + \int_0^1 f'(t)dt.$$

On note que la fonction $g : x \mapsto x$ convient, et on a :

$$\|g\|^2 = g(1)^2 + \int_0^1 1 dt = 1 + 1 = 2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient donc que pour tout $f \in E$:

$$\left(f(1) + \int_0^1 f'(t)dt \right)^2 \leq 2 \left(f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \right).$$

Exercice 11.5 (★★ - Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ - \hookrightarrow)

On considère l'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose :

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB)$$

1. Montrer que pour tout $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, on a : $\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{i,j}$
2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
3. Déterminer la norme du vecteur $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.
4. Établir que $\forall A \in E$, $\left(\sum_{i=1}^n a_{i,i} \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2$.
5. Montrer que les sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques réelles sont orthogonaux.

Exercice 11.6 (★)

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Montrer l'égalité suivante (appelée *identité du parallélogramme*) :

$$\forall x, y \in E, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Interpréter géométriquement ce résultat.

2. En déduire l'égalité suivante (appelée *égalité de la médiane*) :

$$\forall x, y \in E, \quad \left\| \frac{x + y}{2} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x - y\|^2}.$$

Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 11.7 (★★★ - QSP HEC 2007)

Soit E un espace euclidien de dimension n . On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x, y \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle f(x), f(y) \rangle = 0.$$

Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = k \|x\|$.

Indication. On pourra utiliser, après l'avoir justifié, que si x et y sont deux vecteurs de même norme, alors $(x - y)$ et $(x + y)$ sont orthogonaux.

Il faut partir de la remarque suivante : si x et y sont deux vecteurs de même norme, alors $x - y$ et $x + y$ sont des vecteurs orthogonaux. En effet, on a :

$$\langle x - y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle - \langle y, y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0.$$

Soit alors $x \in E$ unitaire, et notons $k = \|f(x)\|$. Montrons que pour tout $y \in E$ unitaire, on a $\|f(y)\| = k$. D'après la remarque précédente, $x - y$ et $x + y$ sont donc orthogonaux. D'où par hypothèse :

$$\langle f(x - y), f(x + y) \rangle = 0.$$

Or f est linéaire, et on a par bilinéarité :

$$0 = \langle f(x) - f(y), f(x) + f(y) \rangle = \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2.$$

Ainsi on obtient $\|f(y)\|^2 = \|f(x)\|^2 = k^2$, et donc $\|f(y)\| = k$.

Soit enfin $y \in E$ quelconque. Si $y = 0_E$, alors on a $f(y) = 0_E$ et donc $\|f(y)\| = 0 = k \|y\|$. Si $y \neq 0_E$, alors $z = \frac{y}{\|y\|}$ est un vecteur unitaire. On déduit de ce qu'on a fait que $\|f(z)\| = k$. Ainsi on a :

$$k = \|f(z)\| = \left\| f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\| = \left\| \frac{1}{\|y\|} f(y) \right\| = \frac{1}{\|y\|} \|f(y)\|.$$

On obtient donc $\|f(y)\| = k \|y\|$.

Ainsi on a bien obtenu l'existence d'un réel $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = k \|x\|$.

Bases orthonormées**Exercice 11.8 (★)**

Soit \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire canonique. On note \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^4 .

- On pose $v_1 = (3, 4, 0, 0)$, $v_2 = (-4, 3, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, 5, 12)$, $v_4 = (0, 0, -12, 5)$. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle orthogonale ? En déduire une base orthonormée $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de \mathbb{R}^4 .
- Déterminer $P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$.

Exercice 11.9 (★)

On se place dans \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire canonique. On considère le sous-espace vectoriel $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = -z\}$.

On note $e_1 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)$ et $e_3 = \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)$.

- Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de E .

2. Justifier que $u = (2, 3, -3, 7) \in E$ et déterminer $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.

Exercice 11.10 (★★ - 📌)

On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^tMN)$. Soit $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de E .

1. Montrer que pour tout $1 \leq i, j, k, l \leq n$, $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.
2. Montrer que $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base orthonormale de E .

1. Cette formule a été établie au TD1.

2. On a pour tout $1 \leq i, j, k, l \leq n$,

$$\begin{aligned} \langle E_{i,j}, E_{k,l} \rangle &= \text{Tr}({}^tE_{i,j}E_{k,l}) = \text{Tr}(E_{j,i}E_{k,l}) \\ &= \text{Tr}(\delta_{i,k}E_{j,l}) = \delta_{i,k}\text{Tr}(E_{j,l}) \\ &= \delta_{i,k}\delta_{j,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ et } j = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi, $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une famille orthonormale de E , et une base de E . C'est donc une base orthonormée de E .

Exercice 11.11 (★★ - Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Dans chacun des cas suivants, donner une base orthonormée du sous espace vectoriel F de E , muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}((1, 0, -2), (1, 1, 1))$, produit scalaire canonique ;
2. $E = F = \mathbb{R}_2[X]$, $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$;
3. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$, $\langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^tMN)$;
4. $E = \mathbb{R}^4$, $F = \text{Vect}((1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1))$, produit scalaire canonique ;
5. $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \text{Vect}(X^2 + 1, X^3 + 1)$, $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

Solutions.

1. $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, -2), \frac{1}{\sqrt{70}}(6, 5, 3)\right)$
2. $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}X, \sqrt{\frac{45}{8}}(X^2 - \frac{1}{3})\right)$
3. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$
4. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 2, -1, 2), \frac{1}{\sqrt{15}}(1, -3, -1, 2)\right)$
5. $\left(\sqrt{\frac{15}{28}}(X^2 + 1), \frac{\sqrt{7}}{2}(16X^3 - 15X^2 + 1)\right)$

Exercice 11.12 (★★★ - Oral HEC 2006)

On considère une famille de vecteurs unitaires (e_1, \dots, e_p) de E espace euclidien de dimension n , vérifiant la relation suivante :

$$\forall v \in E, \quad \|v\|^2 = \sum_{k=1}^p \langle e_k, v \rangle^2.$$

Montrer que la famille (e_1, \dots, e_p) est orthonormale, puis que c'est une base orthonormale de E . En déduire que $n = p$.

Montrons que (e_1, \dots, e_p) est orthonormale. Prenons pour cela $v = e_i$ pour $1 \leq i \leq n$:

$$\|e_i\|^2 = \sum_{k=1}^p \langle e_k, e_i \rangle^2 = \|e_i\|^2 + \sum_{k \neq i} \langle e_k, e_i \rangle^2$$

D'où :

$$0 = \sum_{k \neq i} \underbrace{\langle e_k, e_i \rangle^2}_{\geq 0}.$$

Ainsi on obtient que pour tout $k \neq i$, $\langle e_k, e_i \rangle = 0$. Comme les vecteurs sont de plus unitaires par hypothèse, on en déduit que la famille (e_1, \dots, e_p) est orthonormée.

Supposons à présent que $p < n$. La famille (e_1, \dots, e_p) n'est donc pas une base. Puisque c'est une famille orthonormée, on peut la compléter en une base orthonormée $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$. Mais alors prenons $v = e_n$, on obtient :

$$1 = \|e_n\|^2 = \sum_{k=1}^p \underbrace{\langle e_k, e_n \rangle^2}_{=0 \text{ car } k \neq n} = 0.$$

D'où une contradiction. Donc $p = n$ et la famille (e_1, \dots, e_p) est bien une base orthonormée.

Exercice 11.13 (★★★★ - Endomorphismes orthogonaux - Oral ESCP 2013 -)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit E un espace euclidien de dimension n .

On note $\langle u, v \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v de E , et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

On dit qu'un endomorphisme f de E est *orthogonal* si sa matrice dans une base orthonormale est une matrice orthogonale.

1. Montrer que f est orthogonale si et seulement si : $\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
2. Soit f un endomorphisme de E .
 - (a) Montrer que si f est orthogonale, alors pour tout $x \in E$: $\|f(x)\| = \|x\|$.
 - (b) Montrer réciproquement que, si pour tout x de E , on a $\|f(x)\| = \|x\|$, alors f est orthogonale.

1. On procède par double implications.

\Rightarrow Supposons que f est un endomorphisme orthogonal. Il existe donc une base orthonormée \mathcal{B} de E telle que $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ est orthogonale. Pour tout $x, y \in E$, notons $X = M_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = M_{\mathcal{B}}(y)$. Par les formules donnant le produit scalaire **dans une base orthonormée**, on a :

$$\langle f(x), f(y) \rangle = {}^t(MX)(MY) = {}^tX {}^tMMY = {}^tXY = \langle x, y \rangle.$$

\Leftarrow Supposons que pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Montrons que f est orthogonale. Fixons pour cela une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E , et notons $M_{\mathcal{B}}(f) = A = (a_{i,j})$. On souhaite montrer que A est orthogonale. Par définition d'une matrice d'un endomorphisme dans une base donnée, on a :

$$\forall j = 1, \dots, n, \quad f(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{k,j} e_k.$$

On obtient :

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n a_{k,i} e_k, \sum_{l=1}^n a_{l,j} e_l \right\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{k,i} a_{l,j} \langle e_k, e_l \rangle = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j}.$$

Mais nous reconnaissons là le coefficient situé à la i -ème ligne et j -ème colonne de tMM .
D'autre part, on a $\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$, et donc :

$$[{}^tMM]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient ${}^tMM = I_n$, et donc que f est orthogonale.

Autre méthode. Toujours en notant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E , on a :

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

La famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est donc orthonormée. Elle est en particulier libre, de cardinal $n = \dim(E)$. C'est donc une base orthonormée de E . Notons là \mathcal{B}' . On sait alors que $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est orthogonale en tant que matrice de passage entre deux bases orthonormées. Or on a :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} f(e_1) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_n) \\ a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} = M_{\mathcal{B}}(f)$$

Et donc la matrice de f dans la base \mathcal{B} est orthogonale : f est un endomorphisme orthogonal.

2. (a) Supposons f orthogonale. D'après la question précédente, f conserve le produit scalaire, donc on a pour tout $x \in E$:

$$\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|.$$

Donc f conserve la norme.

- (b) Supposons que f conserve la norme. On souhaite montrer que f conserve le produit scalaire. On va se servir de l'identité suivante :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

qui permet de calculer un produit scalaire à l'aide de la norme. On en déduit que pour tout $x, y \in E$:

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{2} (\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|f(x + y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Donc f conserve le produit scalaire.

Polynômes orthogonaux

Exercice 11.14 (★★)

Soit n un entier naturel et a un réel. On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n et φ l'application définie, pour tout couple (P, Q) de vecteurs de E , par :

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire. On notera désormais $\varphi(P, Q) = \langle P, Q \rangle$.
2. Pour tout entier naturel i , on note $P_i = (X - a)^i$.

- (a) Calculer $P_i^{(k)}(a)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
 (b) Montrer que la famille (P_0, P_1, \dots, P_n) est une famille orthogonale de E .
 (c) Pour tout entier i de $\{0, \dots, n\}$, calculer $\|P_i\|$. En déduire une base orthonormée \mathcal{B} de E .
3. Exprimer les coordonnées d'un polynôme P de E , dans cette base \mathcal{B} , à l'aide des dérivées successives de P en a . Retrouver ainsi la formule de Taylor pour les polynômes.

1. On montre facilement que φ est bilinéaire symétrique et positive. Montrons que φ est définie positive. Soit pour cela $P \in E$ tel que :

$$0 = \langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^n (P^{(k)}(a))^2.$$

Puisque tous les termes de cette somme sont positifs, on en déduit que :

$$P(a) = P'(a) = \dots = P^{(n)}(a) = 0.$$

Ainsi a est racine d'ordre de multiplicité au moins $n+1$ de P . Or $\deg(P) \leq n$, donc ce n'est possible que si $P = 0_E$.

Ainsi φ est bien un produit scalaire.

2. (a) Notons tout d'abord que P_i est un polynôme de degré i . On a plusieurs cas possibles :

- si $k > i$, alors $P_i^{(k)} = 0$ et donc $P_i^{(k)}(a) = 0$.
- si $0 \leq k < i$, alors on a :

$$P_i^{(k)} = i(i-1)\dots(i-k+1)(X-a)^{i-k} = \frac{i!}{(i-k)!}(X-a)^{i-k}.$$

Mais comme $i-k > 0$, a est bien racine de $P_i^{(k)}$ et on a donc $P_i^{(k)}(a) = 0$.

- si $k = i$, alors dans ce cas, en reprenant le calcul précédent :

$$P_i^{(i)} = \frac{i!}{(i-i)!}(X-a)^{i-i} = i!.$$

Dans ce cas, $P_i^{(i)}(a) = i!$.

Ainsi on a montré que $P_i^{(k)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ i! & \text{si } i = k \end{cases}$.

- (b) Pour tout $i \neq j$, pour tout $0 \leq k \leq n$, on a

$$P_i^{(k)}(a)P_j^{(k)}(a) \begin{cases} 0 \times 0 & \text{si } k \neq i, j \\ i! \times 0 & \text{si } k = i \neq j \\ 0 \times j! & \text{si } k = j \neq i \end{cases} = 0.$$

Donc on a bien $\langle P_i, P_j \rangle = 0$ si $i \neq j$.

- (c) Pour $i = j$, on a pour tout $0 \leq k \leq n$:

$$P_i^{(k)}(a)P_i^{(k)}(a) \begin{cases} 0 \times 0 & \text{si } k \neq i \\ i! \times i! & \text{si } k = i \end{cases}$$

Donc on a $\|P_i\| = \sqrt{\langle P_i, P_i \rangle} = \sqrt{(i!)^2} = i!$. Ainsi la famille $\left(\frac{P_0}{\|P_0\|}, \dots, \frac{P_n}{\|P_n\|}\right)$ est une famille orthonormée, donc libre, de cardinal $n+1$ dans un espace E de dimension $n+1$. C'est donc une base orthonormée de E , qu'on notera \mathcal{B} .

3. Puisque la base est orthonormée, les coordonnées de $P \in E$ sont connues :

$$P = \left\langle \frac{P_0}{\|P_0\|}, P \right\rangle \frac{P_0}{\|P_0\|} + \dots + \left\langle \frac{P_n}{\|P_n\|}, P \right\rangle \frac{P_n}{\|P_n\|} = \langle P_0, P \rangle \frac{P_0}{\|P_0\|^2} + \dots + \langle P_n, P \rangle \frac{P_n}{\|P_n\|^2}$$

Pour tout $0 \leq i \leq n$, on a :

$$\langle P_i, P \rangle = \sum_{j=0}^n \underbrace{P_i^{(j)}(a)}_{=0 \text{ si } i \neq j} P^{(j)}(a) = P_i^{(i)}(a) P^{(i)}(a) = i! P^{(i)}(a).$$

On obtient donc que :

$$\begin{aligned} P &= \langle P_0, P \rangle \frac{P_0}{\|P_0\|^2} + \dots + \langle P_n, P \rangle \frac{P_n}{\|P_n\|^2} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{i! P^{(i)}(a)}{(i!)^2} P_i = \sum_{i=0}^n \frac{P^{(i)}(a)}{i!} (X - a)^i \end{aligned}$$

On retrouve ici la formule de Taylor en a pour les polynômes de degrés $\leq n$.

Exercice 11.15 (★★ - Polynômes de Tchebychev -)

1. (a) Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. En déduire que l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

Montrer que cette application définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

3. (a) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(a)\cos(b)$ en fonction de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$.

(b) On définit la suite de polynômes $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall 2 \leq k \leq n-2, \quad T_{k+2} = 2XT_{k+1} - T_k.$$

Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $T_k(\cos(x)) = \cos(kx)$.

4. Montrer que la famille (T_0, T_1, \dots, T_n) est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

On pourra effectuer le changement de variables $t = \cos(x)$ dans l'intégrale définissant $\langle T_i, T_j \rangle$.

5. Calculer $\|T_k\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 11.16 (★★★★ - Polynômes orthogonaux -)

On considère une fonction continue strictement positive $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, et on pose :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t)\omega(t) dt.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Établir l'existence d'une base orthonormée de polynômes (P_0, P_1, \dots, P_n) tels que $\deg(P_k) = k$ pour $0 \leq k \leq n$.

En déduire que pour tout $1 \leq k \leq n$, P_k est orthogonale à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

3. Montrer, pour $0 \leq k \leq n-1$, qu'il existe a_k, b_k, c_k (avec $c_0 = 0$) tels que :

$$XP_k(X) = a_k P_{k+1}(X) + b_k P_k(X) + c_k P_{k-1}(X).$$

Comparer les deux nombres c_k et a_{k-1} .

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question, on souhaite montrer que toutes les racines de P_k sont des réels appartenant à l'intervalle $]a, b[$, et qu'elles sont toutes de multiplicité 1.

Notons x_1, \dots, x_p les racines d'ordre impaires de P_k appartenant à $]a, b[$, et on définit le polynôme

$$D = \prod_{i=1}^p (X - x_i) \quad (\text{dans le cas où } P_k \text{ n'a aucune racine d'ordre impair dans }]a, b[, \text{ on pose } D = 1).$$

- (a) Justifier que $P_k D$ garde un signe constant sur $[a, b]$.
- (b) Par l'absurde, on suppose que $p < k$. Obtenir une contradiction en considérant le produit scalaire $\langle P_k, (X - x_1) \dots (X - x_p) \rangle$. Conclure.

1. À faire.

2. On considère la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. C'est en particulier une famille libre, on peut donc lui appliquer l'algorithme de Gram Schmidt. Notons (P_0, \dots, P_n) la famille orthonormale ainsi obtenue. Rappelons une propriété de cette famille (voir la propriété du cours) :

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad \text{Vect}(1, X, \dots, X^k) = \text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k).$$

On va montrer par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $\deg(P_k) = k$.

Init. Si $k = 0$, alors on a :

$$\text{Vect}(1) = \text{Vect}(P_0) \quad \Rightarrow \quad \deg(P_0) = 0.$$

D'où la propriété au rang 0.

Hér. Soit $0 \leq k \leq n - 1$, et supposons la propriété vraie au rang k .

On a par l'algorithme de Gram Schmidt :

$$\text{Vect}(1, X, \dots, X^k) = \text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k)$$

et

$$\text{Vect}(1, X, \dots, X^{k+1}) = \text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k, P_{k+1}).$$

En particulier, on a $P_{k+1} \in \text{Vect}(1, X, \dots, X^{k+1})$ et il existe des coefficients a_0, \dots, a_{k+1} tels que :

$$P_{k+1} = a_0 + a_1 X + \dots + a_{k+1} X^{k+1}.$$

Supposons que $a_{k+1} = 0$, alors on aurait $P_{k+1} \in \text{Vect}(1, X, \dots, X^k)$, mais dans ce cas on aurait :

$$\text{Vect}(1, X, \dots, X^{k+1}) = \text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k, P_{k+1}) \subset \text{Vect}(1, X, \dots, X^k)$$

Ce qui est faux car $\mathbb{R}_{k+1}[X] \not\subset \mathbb{R}_k[X]$. Ainsi on a bien que $a_{k+1} \neq 0$, et donc que $\deg(P_{k+1}) = k + 1$.

Enfin c'est une famille orthonormée, donc libre, de cardinal $n + 1$ égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$. C'est donc une base orthonormée.

Soit enfin $1 \leq k \leq n$, et soit $Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$. Montrons que $\langle P_k, Q \rangle = 0$. Comme

$$Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^{k-1}) = \text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_{k-1}),$$

il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$Q = \alpha_0 P_0 + \dots + \alpha_{k-1} P_{k-1}.$$

On obtient par linéarité à droite :

$$\langle P_k, Q \rangle = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \underbrace{\langle P_k, P_i \rangle}_{=0} = 0.$$

Ainsi P_k est orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. On dit alors que P_k est orthogonal au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

3. Soit $0 \leq k \leq n - 1$. On a $\deg(X P_k) = \deg(P_k) + 1 = k + 1$, donc $X P_k \in \mathbb{R}_{k+1}[X] = \text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k, P_{k+1})$. Ainsi il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_{k+1} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$X P_k = \alpha_0 P_0 + \dots + \alpha_{k+1} P_{k+1}.$$

Or comme la famille (P_0, \dots, P_n) est une base orthonormée, on peut exprimer ces coordonnées en terme de produits scalaires :

$$\forall 0 \leq i \leq k+1, \quad \langle XP_k, P_i \rangle = \alpha_i.$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \langle XP_k, P_i \rangle &= \int_a^b tP_k(t)P_i(t)\omega(t) dt \\ &= \int_a^b P_k(t)tP_i(t)\omega(t) dt \\ &= \langle P_k, XP_i \rangle. \end{aligned}$$

Si $0 \leq i \leq k-2$, XP_i est de degré $i+1 \leq k-1$ et est donc orthogonal à P_k . Ainsi on a :

$$\forall 0 \leq i \leq k-1, \quad \alpha_i = \langle XP_k, P_i \rangle = 0.$$

Donc on obtient la décomposition :

$$XP_k = \alpha_{k-1}P_{k-1} + \alpha_k P_k + \alpha_{k+1}P_{k+1}.$$

Quitte à renommer ces coefficients, on obtient l'existence pour $0 \leq k \leq n-1$, de a_k, b_k, c_k tels que :

$$XP_k(X) = a_k P_{k+1}(X) + b_k P_k(X) + c_k P_{k-1}(X).$$

Enfin on a :

$$\begin{aligned} c_k &= \langle XP_k, P_{k-1} \rangle = \langle P_k, XP_{k-1} \rangle \\ &= \langle P_k, a_{k-1}P_k + b_{k-1}P_{k-1} + c_{k-1}P_{k-2} \rangle \\ &= a_{k-1}\langle P_k, P_k \rangle + b_{k-1}\langle P_k, P_{k-1} \rangle + c_{k-1}\langle P_k, P_{k-2} \rangle = a_{k-1} \end{aligned}$$

4. (a) Par définition de D , toutes les racines x_i de $P_k \times D$ sur $]a, b[$ sont d'ordre de multiplicité pair $2m_i$. Ainsi on a :

$$P_k D = \left(\prod_{i=1}^p (X - x_i)^{2m_i} \right) Q$$

où Q est un polynôme sans racine dans $]a, b[$.

- $t \mapsto \prod_{i=1}^p (t - x_i)^{2m_i}$ est clairement de signe constant sur \mathbb{R} , et donc sur $[a, b]$ également.
- $t \mapsto Q(t)$ est une fonction polynomiale, donc continue, qui ne s'annule pas sur $]a, b[$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que Q garde un signe constant sur $]a, b[$, et donc sur $[a, b]$ aussi.

Par produit, la fonction polynomiale $t \mapsto \left(\prod_{i=1}^p (X - x_i)^{2m_i} \right) Q(t)$ reste donc de signe constant sur $[a, b]$.

- (b) Supposons $p < k$. Alors $D = \prod_{i=1}^p (X - x_i)$ est de degré p , donc est orthogonal à P_k puisque $k > p$. Ainsi on a :

$$\langle P_k, D \rangle = 0.$$

D'autre part, on a :

$$\langle P_k, D \rangle = \int_a^b P_k(t)D(t)\omega(t) dt$$

Or la fonction $t \mapsto P_k(t)D(t)\omega(t)$ est **continue** sur $[a, b]$, **de signe constant** d'après la question précédente et son intégrale est nulle. Cela impliquerait donc que :

$$\forall t \in [a, b], \quad P_k(t)D(t)\omega(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall t \in [a, b], t \neq x_1, \dots, x_p, \quad P_k(t) = 0.$$

Ainsi P_k admet une infinité de racines, et serait donc le polynôme nulle. Ce qui contredit que $\deg(P_k) = k$.

Ainsi $p = k$, et on a donc obtenu que P_k admet k racines d'ordre impaires dans $]a, b[$. Puisque $k = \deg(P_k)$, P_k ne peut pas admettre plus de k racines comptées avec leurs multiplicités. Ainsi P_k est en fait scindé à racines simples, et toutes les racines de P_k appartiennent à l'intervalle $]a, b[$.
