TD11

Produit scalaire et espaces euclidiens

Produit scalaire et norme euclidienne

Exercice 11.1 (★)

On considère le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ et on pose pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$:

$$\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

1. Montrer que pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\langle x, x\rangle = 2(x_1 + \frac{x_2}{2})^2 + \frac{3}{2}x_2^2$.
2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que les vecteurs $(1, 0)$ et $(1, -2)$ sont orthogonaux pour ce produit scalaire et calculer leur norme. Les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 11.2 (★ - EML 2007)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'on définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ en posant

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)(1 - t^2)\mathrm{d}t.$$

Exercice 11.3 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$.

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 11.4 (★)

On considère l'espace $E = \mathscr{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et on pose :

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g\rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Établir que $\forall f \in E, \quad \left(f(1) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)dt\right)^2 \leq 2\left(f(1)^2 + \displaystyle\int_0^1 f'(t)^2dt\right).$

Exercice 11.5 (★★ - Produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ - ✍)

On considère l'espace $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose :

$$\langle A, B\rangle = Tr({}^tAB)$$

1. Montrer que pour tout $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, on a : $\langle A, B\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}$
2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
3. Déterminer la norme du vecteur $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.
4. Établir que $\forall A \in E, \quad \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right)^2 \leq n\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$

5. Montrer que les sous-espaces $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques réelles sont orthogonaux.

Exercice 11.6 (★)
Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Montrer l'égalité suivante (appelée *identité du parallélogramme*) :
$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$
Interpréter géométriquement ce résultat.
2. En déduire l'égalité suivante (appelée *égalité de la médiane*) :
$$\forall x, y \in E, \quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{2(\|x\|^2+\|y\|^2) - \|x-y\|^2}.$$
Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 11.7 (★★★ - QSP HEC 2007)
Soit E un espace euclidien de dimension n. On note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.
Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante :
$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle x, y\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle f(x), f(y)\rangle = 0.$$
Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.
Indication. On pourra utiliser, après l'avoir justifié, que si x et y sont deux vecteurs de même norme, alors $(x-y)$ et $(x+y)$ sont orthogonaux.

Bases orthonormées

Exercice 11.8 (★)
Soit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. On pose $v_1 = (3,4,0,0), v_2 = (-4,3,0,0), v_3 = (0,0,5,12), v_4 = (0,0,-12,5)$. La famille (v_1,v_2,v_3,v_4) est-elle orthogonale ? En déduire une base orthonormée $\mathscr{C} = (e_1,e_2,e_3,e_4)$ de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer $P_{\mathscr{C},\mathscr{B}}$.

Exercice 11.9 (★)
On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. On considère le sous-espace vectoriel $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ y = -z\}$.
On note $e_1 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)$ et $e_3 = \frac{1}{2}(-1,1,-1,1)$.

1. Montrer que (e_1,e_2,e_3) est une base orthonormée de E.
2. Justifier que $u = (2,3,-3,7) \in E$ et déterminer $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.

Exercice 11.10 (★★ - ✍)
On considère $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle M, N\rangle = Tr({}^tMN)$. Soit $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de E.

1. Montrer que pour tout $1 \leq i,j,k,l \leq n$, $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.
2. Montrer que $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base orthonormale de E.

Exercice 11.11 (★★ - Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Dans chacun des cas suivants, donner une base orthonormée du sous espace vectoriel F de E, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = Vect((1,0,-2),(1,1,1))$, produit scalaire canonique ;
2. $E = F = \mathbb{R}_2[X]$, $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$;
3. $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), F = Vect\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\right)$, $\langle M, N\rangle = Tr({}^tMN)$;
4. $E = \mathbb{R}^4$, $F = Vect((1,0,1,0),(1,1,0,1),(2,0,1,1))$, produit scalaire canonique ;
5. $E = \mathbb{R}[X]$, $F = Vect(X^2+1, X^3+1)$, $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

Solutions.
1. $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2), \frac{1}{\sqrt{70}}(6,5,3)\right)$ 2. $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}X, \sqrt{\frac{45}{8}}\left(X^2-\frac{1}{3}\right)\right)$ 3. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$
4. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0), \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,-1,2), \frac{1}{\sqrt{15}}(1,-3,-1,2)\right)$ 5. $\left(\sqrt{\frac{15}{28}}(X^2+1), \frac{\sqrt{7}}{2}(16X^3-15X^2+1)\right)$

Exercice 11.12 (★★★ - Oral HEC 2006)

On considère une famille de vecteurs unitaires $(e_1, \dots, e_p)$ de E espace euclidien de dimension n, vérifiant la relation suivante :

$$\forall v \in E, \quad ||v||^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle e_k, v\rangle^2.$$

Montrer que la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormale, puis que c'est une base orthonormale de E. En déduire que $n = p$.

Exercice 11.13 (★★★★ - Endomorphismes orthogonaux - Oral ESCP 2013 - ✍)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit E un espace euclidien de dimension n.
On note $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v de E, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
On dit qu'un endomorphisme f de E est *orthogonal* si sa matrice dans une base orthonormale est une matrice orthogonale.

1. Montrer que f est orthogonale si et seulement si : $\forall x, y \in E$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
2. Soit f un endomorphisme de E.
   (a) Montrer que si f est orthogonale, alors pour tout $x \in E$: $\|f(x)\| = \|x\|$.
   (b) Montrer réciproquement que, si pour tout x de E, on a $\|f(x)\| = \|x\|$, alors f est orthogonal.

Polynômes orthogonaux

Exercice 11.14 (★★)

Soit n un entier naturel et a un réel. On note E l'espace vectoriel des polynômes à cœfficients réels, de dégré inférieur ou égal à n et φ l'application définie, pour tout couple (P, Q) de vecteurs de E, par :

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire. On notera désormais $\varphi(P, Q) = \langle P, Q\rangle$.
2. Pour tout entier naturel i, on note $P_i = (X-a)^i$.
   (a) Calculer $P_i^{(k)}(a)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille orthogonale de E.

(c) Pour tout entier i de $\{0,\dots,n\}$, calculer $\|P_i\|$. En déduire une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E.

3. Exprimer les coordonnées d'un polynôme P de E, dans cette base $\mathscr{B}$, à l'aide des dérivées successives de P en a. Retrouver ainsi la formule de Taylor pour les polynômes.

Exercice 11.15 (★★ - Polynômes de Tchebychev - ✍)

1. (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ converge pour tout $k\in\mathbb{N}$.
   (b) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ converge.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $\langle P,Q\rangle=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$.

   Montrer que cette application définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. (a) Soit $a,b\in\mathbb{R}$. Exprimer $\cos(a)\cos(b)$ en fonction de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$.
   (b) On définit la suite de polynômes $(T_k)_{0\le k\le n}$ par :
   $$T_0=1,\quad T_1=X\quad\text{ et }\quad\forall 2\le k\le n-2,\ T_{k+2}=2XT_{k+1}-T_k.$$
   Montrer que pour tout $0\le k\le n$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $T_k(\cos(x))=\cos(kx)$.
4. Montrer que la famille $(T_0,T_1,\dots,T_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

   On pourra effectuer le changement de variables $t=\cos(x)$ dans l'intégrale définissant $\langle T_i,T_j\rangle$.
5. Calculer $\|T_k\|$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 11.16 (★★★★ - Polynômes orthogonaux - ✍)

On considère une fonction continue strictement positive $\omega:[a,b]\to\mathbb{R}$, et on pose :
$$\forall P,Q\in\mathbb{R}_n[X],\quad\langle P,Q\rangle=\int_a^b P(t)Q(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Établir l'existence d'une base orthonormée de polynômes $(P_0,P_1,\dots,P_n)$ tels que $\deg(P_k)=k$ pour $0\le k\le n$.

   En déduire que pour tout $1\le k\le n$, P_k est orthogonale à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.
3. Montrer, pour $0\le k\le n-1$, qu'il existe a_k,b_k,c_k (avec $c_0=0$) tels que :
   $$XP_k(X)=a_kP_{k+1}(X)+b_kP_k(X)+c_kP_{k-1}(X).$$
   Comparer les deux nombres c_k et a_{k-1}.
4. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Dans cette question, on souhaite montrer que toutes les racines de P_k sont des réels appartenant à l'intervalle $]a,b[$, et qu'elles sont toutes de multiplicité 1.

   Notons $x_1,\dots,x_p$ les racines d'ordre impaires de P_k appartenant à $]a,b[$, et on définit le polynôme $D=\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X-x_i)$ (dans le cas où P_k n'a aucune racine d'ordre impair dans $]a,b[$, on pose $D=1$).
   (a) Justifier que P_kD garde un signe constant sur $[a,b]$.
   (b) Par l'absurde, on suppose que $p<k$. Obtenir une contradiction en considérant le produit scalaire $\langle P_k,(X-x_1)\dots(X-x_p)\rangle$. Conclure.
