TD12

Couples de variables à densité

Exercice 12.1 (★ - Minimum de deux lois exponentielles)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telles que $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(\mu)$. Déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$.

Exercice 12.2 (★★ - Loi logistique)
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité X. Déterminer une densité de X.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes possédant F comme fonction de répartition. On pose $Z = \max(X, Y)$.
   (a) Montrer que Z est une variable à densité.
   (b) Déterminer une densité de Z.

Exercice 12.3 (★★)

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telles que $X \hookrightarrow \mathscr{E}(3)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(5)$. Déterminer la loi de $Z = 3X + 5Y$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant la loi normale $\mathscr{N}(-1, 2)$. Déterminer la loi de $3X - 2Y$.

Exercice 12.4 (★★)
On suppose X et Y indépendantes. Déterminer la loi de $Z = X + Y$ dans les cas suivants.

1. $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$
2. $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$

Exercice 12.5 (★★ - Loi de Gompertz)
On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x-e^{-x}}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ayant toutes deux f pour densité.
   (a) Déterminer une densité de $-Y$.
   (b) Montrer que $Z = X - Y$ possède une densité, et la déterminer.
   On pourra à cet effet utiliser le changement de variables $u = e^t$ ou $u = e^{-t}$ et utiliser l'espérance d'une loi exponentielle.

Exercice 12.6 (★★ - Produit d'uniformes)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant toutes les deux la loi uniforme $\mathscr{U}([0,1])$.

1. Déterminer la loi de $Z = -\ln(X)$.
2. Posons $T = -\ln(Y)$. Déterminer la loi de $Z + T$, puis la fonction de répartition de XY, et enfin une densité de XY.

Exercice 12.7 (★★★ - Quotient de deux lois exponentielles)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

1. Soit $t > 0$. Déterminer une densité de $-tY$.
2. Montrer qu'une densité de $X - tY$ est donnée par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{t+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{e^{x/t}}{t+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

3. Déterminer la fonction de répartition de $U = \dfrac{X}{Y}$.
   En déduire que U est une variable à densité et en déterminer une densité.
4. Déterminer la loi de $\dfrac{X}{X+Y}$.

1. Y étant une variable à densité, $Z = -tY$ l'est aussi par transformation affine, et une densité de Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \frac{1}{t} f\left(\frac{x}{-t}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{t} e^{x/t} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

2. Les variables X et Y sont indépendantes, donc X et $-tY$ le sont aussi. De plus la densité f_X de X est bornée. Donc $X + Z$ est une variable à densité, et une densité de $X + Z$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) f_Z(x-u) \mathrm{d}u.$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}$:

$$f_X(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ e^{-u} & \text{si } u \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_Z(x-u) = \begin{cases} 0 & \text{si } x-u \geq 0 \\ \dfrac{1}{t} e^{(x-u)/t} & \text{si } x-u < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq u \\ \dfrac{1}{t} e^{(x-u)/t} & \text{si } x < u \end{cases}$$

On a alors deux cas possibles (faites un dessin pour vous en convaincre !) :

- Cas $x \geq 0$. On a $f_X(u) f_Z(x-u) \neq 0$ si et seulement si $u > x$. On obtient :

$$f(x) = \frac{e^{x/t}}{t} \int_x^{+\infty} e^{-u(1+\frac{1}{t})} \mathrm{d}u$$

On a pour tout $A > x$:

$$\int_x^A e^{-u(1+\frac{1}{t})} \mathrm{d}u = \left[-\frac{e^{-u(1+\frac{1}{t})}}{1+\frac{1}{t}} \right]_x^A = \frac{e^{-x(1+\frac{1}{t})}}{1+\frac{1}{t}} - \frac{e^{-A(1+\frac{1}{t})}}{1+\frac{1}{t}}.$$

On a $\lim\limits_{A \to +\infty} \dfrac{e^{-A(1+\frac{1}{t})}}{1+\frac{1}{t}} = 0$ car $t > 0$. On retrouve ainsi que cette intégrale converge, et on a :

$$f(x) = \frac{e^{x/t}}{t} \frac{e^{-x(1+\frac{1}{t})}}{1+\frac{1}{t}} = \frac{e^{-x/t}}{1+t}.$$

- Cas $x < 0$. On a $f_X(u) f_Z(x-u) \neq 0$ pour tout $u \geq 0$, et donc

$$f(x) = \frac{e^{x/t}}{t} \int_0^{+\infty} e^{-u(1+\frac{1}{t})} \mathrm{d}u \overset{(*)}{=} \frac{e^{x/t}}{t} \frac{1}{1+\frac{1}{t}} = \frac{e^{x/t}}{1+t},$$

l'égalité $(*)$ étant obtenue par le même calcul que précédemment, ou en reconnaissant la densité d'une loi exponentielle de paramètre $1 + \dfrac{1}{t}$.

Ainsi $X - tY$ est à densité, dont une densité est donnée par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{t+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{e^{x/t}}{t+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

3. Notons pour commencer que $U > 0$ presque surement, donc pour tout $t \geq 0$, on a $F_U(t) = 0$. Supposons $t > 0$, on a :

$$F_U(t) = P\left(\frac{X}{Y} \leq t\right) \underset{Y>0 \text{ p.s.}}{=} P(X \leq tY) = P((X - tY \leq 0) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{x/t}}{t+1}\mathrm{d}x.$$

Pour tout $B < 0$, on a :

$$\int_B^0 e^{x/t}\mathrm{d}x = \left[te^{x/t}\right]_B^0 = t - te^{B/t} \underset{B \to -\infty}{\longrightarrow} t$$

Ainsi on a $F_U(t) = \dfrac{t}{t+1}$. On a donc finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{t}{t+1} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

La fonction F_U est continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$. Elle est également continue en 0 puisque :

$$\lim_{t \to 0^-} F_U(t) = F_U(0) = \lim_{t \to 0^+} F_U(t)$$

Elle est également de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$. Donc U est une variable à densité.

Pour tout $t \neq 0$, on a :

$$F_U'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{t+1-t}{(t+1)^2} = \dfrac{1}{(t+1)^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Une densité de U est donc :

$$f_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{1}{(t+1)^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

avec un choix arbitraire de la valeur en 0.

4. On a $0 < X < X + Y$ presque surement, donc $T = \dfrac{X}{X+Y} \in]0, 1[$ presque surement. Ainsi on a $F_T(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $F_T(x) = 1$ si $x \geq 1$. Soit à présent $x \in]0, 1[$. On a :

$$\begin{aligned} F_T(x) &= P\left(\frac{X}{X+Y} \leq x\right) = P\left(\frac{X+Y}{X} \geq \frac{1}{x}\right) = P\left(1 + \frac{Y}{X} \geq \frac{1}{x}\right) \\ &= P\left(\frac{Y}{X} \geq \frac{1-x}{x}\right) = P\left(\frac{X}{Y} \leq \frac{x}{1-x}\right) = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{x}{1-x} + 1} = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1}{1-x}} = x. \end{aligned}$$

Ainsi on a obtenu

$$F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Donc T suit une loi uniforme continue sur $[0, 1]$.

Exercice 12.8 (★★★★ - Oral HEC 2016)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

(a) Montrer que f est une densité de probabilité.

(b) Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle de densité f.

(c) Trouver la loi de $Y = \sqrt{X}$ lorsque X est une variable aléatoire positive admettant f pour densité.

2. (a) Pour quelles valeurs réelles de s l'intégrale $\displaystyle\int_s^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-s)}}$ est-elle convergente ?

(b) Calculer alors $\displaystyle\int_s^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-s)}}$ en utilisant le changement de variables $t = \sqrt{\dfrac{x-s}{x}}$.

3. On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes, admettant chacune f pour densité.

(a) Proposer une méthode de simulation en `Scilab` de la variable aléatoire $S = X - Y$.

(b) Démontrer que S est une variable aléatoire à densité et en donner une densité continue sur $\mathbb{R}^*$.

1. (a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1, et est bien positive sur $\mathbb{R}$. Étudions l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$, donc l'intégrale est généralisée en 0. Pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, on a :

$$\int_\varepsilon^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{t}\right]_\varepsilon^1 = 1 - \sqrt{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} = 1.$$

Donc l'intégrale converge et vaut 1. Ainsi f est bien une densité de probabilité.

(b) Calculons la fonction de répartition de X de densité f :

- Si $x \leq 0$, on a $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^x 0\,\mathrm{d}t = 0.$
- Si $0 < x < 1$, on a :
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$$
Fixons pour le calcul $\varepsilon \in]0,1]$. On a :
$$\int_\varepsilon^x f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{t}\right]_\varepsilon^x = \sqrt{x} - \sqrt{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} = \sqrt{x}.$$
- Si $x \geq 1$, on a $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

Ainsi on a $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \in]0,1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, dont je vous laisse le soin de faire une représentation graphique.

(c) Posons $Y = \sqrt{X}$. On a $X(\Omega) =]0,1]$, donc $Y(\Omega) =]0,1]$, de sorte que $F_Y(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $F_Y(x) = 1$ si $x > 1$. Soit à présent $x \in]0,1]$, on a :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\sqrt{X} \leq x) = P(X \leq x^2) = F_X(x^2) = \sqrt{x^2} = x$$

Ainsi on a $F_Y : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Donc Y suit une loi $\mathscr{U}([0,1])$.

2. (a) Pour $s < 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x(x-s)}}$ n'est pas définie sur $]s,0]$, et donc l'intégrale n'a pas de sens. De même si $s > 1$ puisqu'on a $x(x-s) < 0$ pour $x \in [1, s[$.

Pour $s = 0$, et $x \in]0,1]$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{x(x-s)}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{1}{x}$ dont l'intégrale diverge entre 0 et 1.

Supposons $s \in]0,1[$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x(x-s)}}$ est continue sur $]s,1]$ donc l'intégrale est généralisée en s. Et au voisinage de s, on a :

- $\dfrac{1}{\sqrt{x(x-s)}} \underset{x\mapsto s}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{s}\sqrt{x-s}}$,
- $\dfrac{1}{\sqrt{s}\sqrt{x-s}} \geq 0$ sur $]s,1]$,
- l'intégrale $\displaystyle\int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x-s}}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann en s d'exposant $\frac{1}{2} < 1$.

Par théorème de comparaison, on peut donc conclure que $\displaystyle\int_s^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-s)}}$ converge lorsque $s \in]0,1]$.

(b) Posons $t = \sqrt{\dfrac{x-s}{x}} = \sqrt{1-\frac{s}{x}}$. Alors $x \mapsto \sqrt{1-\frac{s}{x}}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $]s,1]$, avec :

$$\lim_{x\to s} \sqrt{1-\frac{s}{x}} = 0 \text{ et } \lim_{x\to 1} \sqrt{1-\frac{s}{x}} = \sqrt{1-s}.$$

On a alors $t^2 = 1 - \dfrac{x}{s}$, soit $x = \dfrac{s}{1-t^2}$, de sorte que $\mathrm{d}x = \dfrac{2st}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t$. Et donc par théorème de changement de variables, on a (tout converge si $s \in]0,1[$ d'après la question précédente) :

$$\int_s^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-s}} = \int_0^{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{1-t^2}\left(\frac{s}{1-t^2}-s\right)}} \frac{2st}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\sqrt{1-t^2}} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$

Or on a $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{1}{(1-t)(1+t)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-t}+\dfrac{1}{1+t}\right)$, de sorte que :

$$\int_s^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-s}} = \int_0^{\sqrt{1-t^2}} \frac{\mathrm{d}t}{1-t} + \int_0^{\sqrt{1-t^2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-s}}{1-\sqrt{1-s}}\right).$$

3. (a) D'après la question 1.(c), si X a pour densité f, alors $\sqrt{X}$ suit une loi $\mathscr{U}([0,1])$. Donc si $U \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$, alors U^2 a pour densité f. Donc on peut simuler S à l'aide de l'instruction suivante :

```
S = rand()^2-rand()^2
```

(b) En tant que transformation affine d'une variable à densité, on a montré en cours que $-Y$ est encore une variable à densité, et qu'une densité de $-Y$ est donnée par $f_Y : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{-t}} & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Puisque ni la densité de X ni celle de $-Y$ ne sont bornées, il faut prendre des précautions : les variables X et $-Y$ sont bien indépendantes, car X et Y le sont. Le théorème sur le produit de convolution (Théorème 1 du cours) s'applique ici. Il nous dit que si la fonction h définie par :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_{-Y}(x-t)\,\mathrm{d}t$$

est bien définie et continue sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors c'est une densité de S.

On a $f_X(t) \neq 0 \Leftrightarrow 0 < t \leq 1$, et de même :

$$f_{-Y}(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x-t < 0 \Leftrightarrow x < t \leq x+1.$$

Donc déjà, pour $x \leq -1$ ou $x \geq 1$, on a $g(x) = 0$ (faire un schéma si nécessaire).

Pour $0 \leq x < 1$, on a :

$$g(x) = \frac{1}{4}\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t-x)}} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}\right).$$

Pour $-1 < x < 0$, on a :

$$g(x) = \frac{1}{4}\int_0^{x+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t-x)}}.$$

En posant le changement de variables $u = t - x$ (affine donc licite), il vient alors :

$$g(x) = \frac{1}{4}\int_{-x}^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(u-(-x))}} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{1+x}}\right).$$

Puisque l'intégrale définissant g est bien définie, et que la fonction g ainsi obtenue est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en $-1, 0, 1$, nous pouvons affirmer que S est bien une variable à densité, et que g en est une densité.

Enfin, puisque l'énoncé nous demandait une densité continue sur $\mathbb{R}^*$, il nous reste juste à remarquer que g est continue en -1 et en 1 puisque $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = 0 = g(-1) = g(1)$.