

Diagonalisation

Diagonalisation

Exercice 13.1 (★)

À l'aide des commandes `spec` et `rank` donnant respectivement le spectre et le rang d'une matrice, déterminer en utilisant `Scilab` si les matrices suivantes sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.2 (★)

Déterminer par le moins de calcul possible si les matrices suivantes sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.3 (★)

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans \mathbb{R} ? dans \mathbb{C} ? Si oui, les diagonaliser et expliciter la matrice de passage. Afin de vérifier ses calculs sur `Scilab`, on pourra utiliser la commande `[P,D] = spec(A)` qui à A associe deux matrices P et D telles que $P^{-1}AP = D$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.4 (★★)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe une matrice Δ diagonale et une matrice P inversible telle que $J = P\Delta P^{-1}$. On explicitera Δ et P .
2. Écrire M comme combinaison linéaire de I_n et J . En déduire que M est diagonalisable, et déterminer une matrice diagonale semblable à M .

Exercice 13.5 (★★)

Soit \mathcal{F} l'espace vectoriel des fonctions définies sur \mathbb{R} à valeurs réelles et E le sous-espace vectoriel de \mathcal{F} engendré par la famille (f_0, f_1, f_2, f_3) où $f_k : x \mapsto x^k e^{-x}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

1. Montrer que \mathcal{B} est une base de E . En déduire la dimension de E .
2. Soit D l'application définie sur E par :

$$\forall f \in E, \quad D(f) = f'$$

où f' désigne la dérivée première de f .

Montrer que D est un endomorphisme de E et écrire sa matrice M dans la base \mathcal{B} .

3. M est-elle inversible ? diagonalisable ?

Exercice 13.6 (★★)

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P)(X) = XP'(X+1)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. f est-elle diagonalisable ?

Exercice 13.7 (★★)

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Pour quelles valeurs de a, b et c la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 13.8 (★★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1. Soit \mathcal{B} une base de E et $A = M_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B}' de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \alpha_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$.
2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $\alpha_n \neq 0$.
3. En déduire que f est diagonalisable si et seulement si $Tr(A) \neq 0$.

1. Puisque f est de rang 1, on a $\dim(\text{Ker}(f)) = n - 1$ par le théorème du rang. Soit alors (e_1, \dots, e_{n-1}) une base de $\text{Ker}(f)$. C'est une famille libre de E qu'on complète en $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ une base de E . Et on a dans cette base $f(e_i) = 0_E$ pour tout $1 \leq i \leq n$. En notant $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ les coordonnées de $f(e_n)$ dans la base \mathcal{B}' , on en déduit que :

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \alpha_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

2. Puisque M est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont sur la diagonale, de sorte que $\text{Sp}(M) = \{0, \alpha_n\}$. On a deux cas alors :
 - Si $\alpha_n = 0$, alors M a une unique valeur propre 0. Elle est donc diagonalisable si et seulement si $M = 0_n$. Or $M \neq 0_n$ car elle est de rang 1. Donc M n'est pas diagonalisable dans ce cas.
 - Si $\alpha_n \neq 0$, alors M a deux valeurs propres 0 et α_n . En particulier, on a $\dim E_{\alpha_n}(M) \geq 1$ et $\dim E_0(M) = n - 1$. On obtient que :

$$1 + (n - 1) \leq \dim E_{\alpha_n}(M) + \dim E_0(M) \leq n.$$

On a donc $\dim E_{\alpha_n}(M) + \dim E_0(M) = n$, et la matrice M est bien diagonalisable dans ce cas.

3. Rappelons deux matrices semblables ont même trace. On en déduit que $\alpha_n = Tr(M) = Tr(A)$. Ainsi on a :

$$Tr(A) \neq 0 \Leftrightarrow M \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow f \text{ diagonalisable.}$$

Exercice 13.9 (★★★ - QSP HEC 2016 - 📄)

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n , diagonalisables et ayant chacune n valeurs propres distinctes.

Montrer que les matrices A et B commutent si et seulement si elles sont diagonalisables avec la même matrice de passage.

⇒ *Idée.* Lorsque deux matrices ou endomorphismes commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

Puisque A est diagonalisable avec n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, on sait alors que les sous-espaces propres sont tous de dimension 1. De plus, si on note $X_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i , alors (X_1, \dots, X_n) est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A . Vérifions que ce sont bien des vecteurs propres aussi pour B . Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$A(BX_i) = (AB)X_i \underset{\text{les matrices commutent}}{=} (BA)X_i = B(AX_i) = B(\lambda_i X_i) = \lambda_i BX_i.$$

Ainsi BX_i appartient au sous-espace propre $E_{\lambda_i}(A) = \text{Vect}(X_i)$. On retrouve ainsi le résultat évoqué plus haut : $E_{\lambda_i}(A)$ est stable par B . Il existe donc un scalaire μ_i tel que :

$$BX_i = \mu_i X_i.$$

Ainsi X_i est un vecteur propre de B pour la valeur propre μ_i . Ceci étant vrai pour tout $1 \leq i \leq n$, on en déduit que (X_1, \dots, X_n) est aussi une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de B . Si on note $P = (X_1 | \dots | X_n)$ la matrice de passage de la base canonique que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à (X_1, \dots, X_n) , on a donc que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}.$$

⇐ Supposons qu'il existe P inversible telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = D_1 \quad \text{et} \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = D_2.$$

Alors on a :

$$AB = PD_1 P^{-1} P D_2 P^{-1} = PD_1 D_2 P^{-1} \underset{(*)}{=} PD_2 D_1 P^{-1} = PD_2 P^{-1} P D_1 P^{-1} = BA$$

car $(*)$ deux matrices diagonales commutent. Ainsi les matrices A et B commutent bien.

Exercice 13.10 (★★★)

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, $p \in]0, 1[$.

Déterminer la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & 0 \\ X+Y & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Commençons par noter que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Étudions la diagonalisabilité de la matrice $A_{k,\ell} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ k+\ell & \ell \end{pmatrix}$ avec $k, \ell \in \mathbb{N}^*$. Cette matrice étant triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont sur la diagonale. Donc on a $\text{Sp}(A_{k,\ell}) = \{k, \ell\}$. Deux cas sont alors possibles :

- si $k \neq \ell$, alors la matrice $A_{k,\ell}$ a deux valeurs propres distinctes, et est de taille 2×2 . Elle est donc

diagonalisable.

- si $k = \ell$, alors la matrice $A_{k,\ell}$ a une unique valeur propre. Elle est donc diagonalisable si et seulement si $A_{k,k} = kI_2$. Or ce n'est pas le cas car $k + \ell \neq 0$.

Ainsi la matrice $A_{k,\ell}$ est diagonalisable si et seulement si $k \neq \ell$.

La probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & 0 \\ X+Y & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable est donc $P(X \neq Y)$. À l'aide de la FPT avec le SCE $([Y = \ell])_{\ell \in \mathbb{N}^*}$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(X \neq Y) &= 1 - P(X = Y) = 1 - \sum_{\ell=1}^{+\infty} P(X = Y, Y = \ell) \\ &= 1 - \sum_{\ell=1}^{+\infty} P(X = \ell, Y = \ell) \\ &= 1 - \sum_{\ell=1}^{+\infty} P(X = \ell)P(Y = \ell) \quad \text{car les va sont indép.} \\ &= 1 - p^2 \sum_{\ell=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^{\ell-1} \\ &= 1 - \frac{p^2}{1 - (1-p)^2} = \frac{2p - 2p^2}{2p - p^2} \end{aligned}$$

Exercice 13.11 (★★★★ - Oral ESCP 2007)

Soit n un entier naturel non nul et Q un polynôme à coefficients réels de degré $d \leq n$.

On définit l'application suivante :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto (PQ)^{(n)} \end{cases}$$

où $(PQ)^{(n)}$ indique que l'on prend la dérivée $n^{\text{ième}}$ du produit de P par Q .

1. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner une CNS sur le polynôme Q pour que φ soit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure. Que dire de plus dans le cas particulier où $d < n$?
4. Déterminer une CNS sur le polynôme Q pour que φ soit diagonalisable.

1. Notons tout d'abord que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, PQ est de degré $\leq n + d \leq 2n$, et donc $(PQ)^{(n)}$ est de degré $\leq n$. Donc φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. On montre de plus facilement que φ est linéaire en utilisant que la dérivation est linéaire (faites le !).

Donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Si $\deg(Q) < n$, on a $\varphi(1) = (Q)^{(n)} = 0$ et donc $0 \in \text{Ker}(\varphi)$. Donc φ n'est pas injectif. Ce n'est donc pas un automorphisme.

Supposons que $\deg(Q) = n$ à présent. Alors pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $X^k Q$ est de degré $k + n$, et donc $\varphi(X^k)$ est de degré k . Ainsi $(\varphi(1), \dots, \varphi(X^n))$ est une famille de polynômes échelonnée en degrés. Elle est donc libre, de cardinal $n + 1$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi l'image d'une base par φ est une base. φ est donc bien un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $X^k Q$ est de degré $k + d$, et donc $\varphi(X^k)$ est de degré inférieur ou égal à $k + d - n \leq k$. Donc la matrice de φ dans la base canonique est bien triangulaire supérieure.

Si de plus $d < n$, alors le degré de $\varphi(X^k)$ est strictement plus petit que k . Donc la matrice de φ dans la base canonique est triangulaire supérieure stricte.

4. Si $\deg(Q) < n$, on vient de voir que la matrice de φ dans la base canonique est triangulaire supérieure stricte. Elle admet donc une unique valeur propre qui est 0. Alors φ est diagonalisable dans ce cas si et seulement si $\varphi = 0$. Or c'est le cas si et seulement si $Q = 0$. En effet il est clair que si $Q = 0$, alors $\varphi = 0$. Si $d > 0$, alors on a $\varphi(X^n)$ de degré $d > 0$ et donc non nul.

Supposons à présent $\deg(Q) = n$, et notons a son coefficient dominant. La matrice de φ dans la base canonique est donc triangulaire supérieure. Les valeurs propres de φ sont alors exactement les coefficients diagonaux. Déterminons les. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $X^k Q$ est de degré $k + n$ et de coefficient dominant aX^{k+n} . D'où en dérivant n fois ce polynôme, $\varphi(X^n)$ est de degré k et de coefficient dominant :

$$(k+n)(k+n-1)\dots(k+1)aX^k = \frac{(k+n)!}{k!}aX^k.$$

Ainsi les valeurs propres de φ sont :

$$an!, \quad a\frac{(n+1)!}{1}, \quad a\frac{(n+2)!}{2!}, \dots, a\frac{(2n)!}{n!}.$$

Or ces valeurs propres sont deux à deux distinctes (on peut par exemple remarquer que $n! < \frac{(n+1)!}{1} < \frac{(n+2)!}{2!} < \dots < \frac{(2n)!}{n!}$). Donc φ a $n+1$ valeurs propres distinctes, et est un endomorphisme d'un espace de dimension $n+1$. φ est donc bien diagonalisable.

Utilisation de polynômes annulateurs

Exercice 13.12 (★)
Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une relation entre A^2 , A et I_3 .
2. Montrer que A admet une seule valeur propre λ . A est-elle diagonalisable ?

Exercice 13.13 (★★)

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'endomorphisme défini par $f(A) = {}^t A$.

1. Calculer f^2 . En déduire un polynôme annulateur de f et les valeurs propres de f .
2. f est-il diagonalisable ?

Exercice 13.14 (★★)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $a_{i,j} = \frac{i}{j}$.

1. Calculer A^2 . En déduire un polynôme annulateur de A , puis que $Sp(A) \subset \{0, n\}$.
2. Déterminer $\text{rg}(A)$. En déduire que 0 est valeur propre de A , et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
3. Résoudre le système $AX = nX$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En déduire que A est diagonalisable.

1. Si on note $(c_{i,j})$ les coefficients de A^2 , on a pour tout $i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^n a_{i,j}a_{j,k} = \sum_{j=1}^n \frac{i}{j} \frac{j}{k} = \sum_{j=1}^n \frac{i}{k} = n \frac{i}{k}.$$

Ainsi on a $A^2 = nA$, et $X^2 - nX$ est un polynôme annulateur de A . Les valeurs propres de A sont donc parmi les racines de ce polynôme, c'est à dire 0 ou n .

2. On a pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $L_j = jL_1$. Donc A est de rang 1. Donc 0 est valeur propre de A et

$$\dim E_0(A) = n - 1.$$

3. On a :

$$AX = nX \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n} = nx_1 \\ x_1 + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n} = \frac{n}{2}x_2 \\ \dots \\ x_1 + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n} = \frac{n}{n}x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n} = nx_1 \\ x_1 = \frac{x_2}{2} = \dots = \frac{x_n}{n} \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = \frac{x_2}{2} = \dots = \frac{x_n}{n}$$

$$\text{On en déduit que } E_n(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ \vdots \\ nx_1 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \right). \text{ Ainsi on a } \dim E_0(A) +$$

$$\dim E_n(A) = (n - 1) + 1 = n, \text{ et } A \text{ est bien diagonalisable, semblable à } \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0 \\ & & & & n \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.15 (★★ - QSP HEC 2005)

Une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe une puissance $p \in \mathbb{N}^*$ telle que $N^p = 0_n$.

À quelle condition une matrice nilpotente est-elle diagonalisable ?

Exercice 13.16 (★★★ - QSP ESCP 2015)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$, et a, b deux scalaires distincts. On suppose que :

$$(f - aId_E)^3 \circ (f - bId_E) = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad (f - aId_E)^2 \circ (f - bId_E) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Étudier la diagonalisabilité de f .

Exercice 13.17 (★★★★ - Oral ESCP 2011 -)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Soit u un endomorphisme de E . On note id l'endomorphisme identité de E .

On souhaite montrer le résultat suivant :

$$u \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow u \text{ annule un polynôme scindé à racines simples dans } \mathbb{K}.$$

1. On suppose dans cette question que u est diagonalisable. On note $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ l'ensemble de ses valeurs propres. Montrer que le polynôme $m(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_k)$ est annulateur de u .
2. Soit f et g deux endomorphismes de E . En considérant la restriction de f à $\text{Ker}(g \circ f)$, montrer que :

$$\dim \text{Ker}(g \circ f) \leq \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Ker}(g).$$

On suppose dans la suite de l'exercice qu'il existe un polynôme :

$$P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_k)$$

annulateur de u , où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ sont des scalaires distincts.

3. (a) Montrer que $n \leq \sum_{j=1}^k \dim \text{Ker}(u - \lambda_j id)$.

(b) En déduire que l'endomorphisme u est diagonalisable.

4. Applications.

- (a) Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension finie, et soit F un sous-espace stable par u . Montrer que l'endomorphisme \tilde{u} induit par u sur F est diagonalisable.
- (b) Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que A^2 est diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable.

1. La preuve a été faite en cours.

2. Considérons $\tilde{f} : \text{Ker}(g \circ f) \rightarrow E$. On a :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\tilde{f}) &= \{x \in \text{Ker}(g \circ f), \tilde{f}(x) = 0\} = \{x \in \text{Ker}(g \circ f), f(x) = 0\} \\ &= \text{Ker}(g \circ f) \cap \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f) \end{aligned}$$

car $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$. D'autre part, on a :

$$\text{Im}(\tilde{f}) = \{\tilde{f}(y), y \in \text{Ker}(g \circ f)\} = \{f(y), y \in \text{Ker}(g \circ f)\} \subset \text{Ker}(g).$$

Ainsi on a par le théorème du rang appliqué à \tilde{f} :

$$\dim \text{Ker}(g \circ f) = \dim \text{Ker}(\tilde{f}) + \dim \text{Im}(\tilde{f}) \leq \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f).$$

3. (a) On note toujours $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de u . Notons $u_i = u - \lambda_i Id_E$. On a :

$$0_{\mathcal{L}(E)} = P(u) = u_1 \circ \dots \circ u_k.$$

D'où en appliquant la propriété précédente (en généralisant par récurrence à une famille de n endomorphismes) :

$$n = \dim \text{Ker} u_1 \circ \dots \circ u_k \leq \sum_{i=1}^k \dim \text{Ker}(u_i)$$

(b) Comme de plus on a $\sum_{j=1}^k \dim \text{Ker}(u - \lambda_j id) \leq n$ d'après le cours, on en déduit que :

$$\sum_{j=1}^k \dim \text{Ker}(u - \lambda_j id) = n.$$

4. (a) Supposons u diagonalisable. D'après ce qu'on a démontré, il annule un polynôme scindé à racines simples P , soit $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Mais alors, on a pour tout $x \in F$:

$$P(\tilde{u})(x) = P(u)(x) = 0_E.$$

Donc on a $P(\tilde{u}) = 0_{\mathcal{L}(F)}$, et \tilde{u} admet un polynôme annulateur scindé à racines simples également. Donc \tilde{u} est bien diagonalisable.

(b) Puisque A^2 est diagonalisable, il annule le polynôme

$$P(X) = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont les valeurs propres distinctes de A^2 . En particulier, puisque A est inversible, A^2 l'est aussi et les λ_i sont non nuls.

Puisque $P(A^2) = 0_n$, le polynôme

$$Q(X) = P(X^2) = \prod_{j=1}^k (X^2 - \lambda_j)$$

est annulateur de A . Ce polynôme est scindé sur \mathbb{C} par le théorème de d'Alembert Gauss. Montrons que ce polynôme à racines simples. Pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\lambda_j \neq 0$ et s'écrit sous forme

trigonométrique $\lambda_j = r_j e^{i\theta_j}$. λ_j admet donc deux racines carrées qui sont $\mu_j = \sqrt{r_j} e^{i\theta_j/2}$ et $-\mu_j$. On obtient donc :

$$Q(X) = \prod_{j=1}^k (X - \mu_j)(X + \mu_j)$$

Toutes les racines de Q sont bien distinctes : en effet on a $\mu_j \neq 0$ pour tout j , et si $j \neq k$, $\mu_j^2 = \lambda_j \neq \lambda_k = \mu_k^2$, donc $\mu_j \neq \pm\mu_k$.

Ainsi A annule un polynôme scindé à racines simples. A est donc bien diagonalisable.

Applications de la diagonalisation

Exercice 13.18 (★)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 4, u_1 = 2, u_2 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

- Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.
- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
- Calculer $A^3 - 2A^2 - A$. En déduire un polynôme annulateur de A , puis montrer que A est diagonalisable.
- En déduire qu'il existe trois réels λ, μ, ν tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda + \mu(-1)^n + \nu 2^n$.
- En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13.19 (★★ - Racine carrée d'une matrice)

Soit $C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Montrer que si $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ commute avec C , alors D est diagonale.
- On cherche à résoudre l'équation matricielle $D^2 = C$ d'inconnue $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 - Montrer que si $D^2 = C$, alors D est diagonale.
 - Déterminer l'ensemble des matrices $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D^2 = C$.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble des matrices B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.

Exercice 13.20 (★★)

Les matrices suivantes sont-elles semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

$$1. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On utilisera que deux matrices diagonalisables A et B sont semblables si et seulement si $Sp(A) = Sp(B)$ et pour tout λ valeur propre, $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(B)$.