TD14

Vecteurs aléatoires

Maximum, minimum

Exercice 14.1 (★)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi $\mathscr{B}(p)$. Déterminer la loi de $Z = \max(X_1, \dots, X_n)$.

Exercice 14.2 (★)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi $\mathscr{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$, et soit $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$. Montrer que Z suit une loi usuelle dont on précisera les paramètres. Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.

Exercice 14.3 (★★)

Un sac contient N boules numérotées de 1 à N. On effectue dans ce sac n tirages d'une boule avec remise et on note Z_n le plus petit numéro obtenu. Déterminer la loi de Z_n.

Exercice 14.4 (★ - Minimum et maximum de lois uniformes)

Soit $a > 0$ et soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme $\mathscr{U}([0,a])$. On pose

$$Y = \max(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad Z = \min(X_1, \dots, X_n).$$

Montrer que Y et Z sont des variables aléatoires à densité et en déterminer une densité.

Exercice 14.5 (★★ - Lois uniformes et loi de Pareto)

Soit $n \geq 3$ et soient $Z_1, \dots, Z_n$ des variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant toutes la loi uniforme sur $]0,a]$, $a > 0$. On pose alors $X_i = \dfrac{1}{Z_i}$.

1. Montrer que X_1 est une variable aléatoire à densité, et qu'une densité de X_1 est :
$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{ax^2} & \text{si } x \geq \frac{1}{a} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
2. Soit $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$. Montrer que Y_n est une variable à densité, et qu'une densité de Y_n est :
$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{n}{a^n x^{n+1}} & \text{si } x \geq \frac{1}{a} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
3. Montrer que Y_n admet une espérance et une variance, et les calculer.
4. `Scilab`. Écrire une fonction `pareto` qui simule la loi de Y_n pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

> 1. On est dans le cas d'une variable fonction d'une variable aléatoire à densité. On procède donc par étapes.
>
> *Étape 1. Support de X_1.* On a $0 < Z_1 \leq a$, d'où $X_1 = \dfrac{1}{Z_1} \geq \dfrac{1}{a}$. Ainsi $X_1(\Omega) = [\frac{1}{a}, +\infty[$. En particulier, on a $F_{X_1}(x) = 0$ pour tout $x < \dfrac{1}{a}$.

Étape 2. Fonction de répartition de X_1. Pour tout $x \geq \frac{1}{a}$, on a :

$$\begin{aligned} F_{X_1}(x) &= P(X_1 \leq x) = P\left(\frac{1}{Z_1} \leq x\right) \\ &= P\left(Z_1 \geq \frac{1}{x}\right) = 1 - P\left(Z_1 < \frac{1}{x}\right) \\ &= 1 - P\left(Z_1 \leq \frac{1}{x}\right) \qquad \text{car } Z_1 \text{ à densité} \\ &= 1 - F_{Z_1}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{\frac{1}{x} - 0}{a - 0} = 1 - \frac{1}{xa} \end{aligned}$$

car $\frac{1}{x} \in]0, a]$. Ainsi on a :

$$F_{X_1} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{xa} & \text{si } x \geq \dfrac{1}{a} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Étape 3. X_1 variable à densité. La fonction F_{X_1} est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en $\frac{1}{a}$ comme composée de fonctions continues. En $\frac{1}{a}$, on a :

$$\lim_{x \to \frac{1}{a}^-} F_{X_1}(x) = 0 = F_{X_1}(1/a) = \lim_{x \to \frac{1}{a}^+} F_{X_1}(x).$$

Ainsi F_{X_1} est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est aussi $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en $\frac{1}{a}$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^1$.

Étape 4. Densité de X_1. Pour tout $x \neq 1/a$, on a :

$$F'_{X_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{ax^2} & \text{si } x > \dfrac{1}{a} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{a} \end{cases}.$$

Une densité de X_1 est donnée par :

$$f_{X_1} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{ax^2} & \text{si } x \geq \dfrac{1}{a} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases},$$

la valeur en $1/a$ étant choisie arbitrairement.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$P(Y_n > x) = P(X_1 > x,\ X_2 > x,\ \ldots\ ,\ X_n > x) = P(X_1 > x)^n$$

car les X_i sont indépendantes et suivent la même loi. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{Y_n}(x) = 1 - P(Y_n > x) = 1 - P(X_1 > x)^n = 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n.$$

On a vu que F_{X_1} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en $1/a$. Donc F_{Y_n} est aussi continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en $1/a$, en tant que composée de fonctions qui le sont. Ainsi Y_n est une variable à densité. De plus pour tout $x \neq 1/a$, on a :

$$F'_{Y_n}(x) = nF'_{X_1}(x)(1 - F_{X_1}(x))^{n-1}.$$

Une densité de Y_n est donc :

$$f_{Y_n} : x \in \mathbb{R} \mapsto nf_{X_1}(x)(1 - F_{X_1}(x))^{n-1} = \begin{cases} n\dfrac{1}{ax^2}\dfrac{1}{(xa)^{n-1}} & \text{si } x \geq \frac{1}{a} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{n}{a^n x^{n+1}} & \text{si } x \geq \frac{1}{a} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

3. Y_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\mathrm{d}x = \frac{n}{a^n}\int_{1/a}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n}$ converge absolument, donc converge car la fonction intégrée est positive. On reconnait ici une intégrale de Riemann en $+\infty$ qui converge bien car $n > 1$. Ainsi $E(Y_n)$ existe et vaut :

$$E(Y_n) = \frac{n}{a^n}\int_{1/a}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \frac{n}{a^n}\lim_{A\to+\infty}\left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_{1/a}^{A} = \frac{n}{a^n}\frac{a^{n-1}}{n-1} = \frac{n}{(n-1)a}.$$

Y_n admet un moment d'ordre 2 si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)\mathrm{d}x = \frac{n}{a^n}\int_{1/a}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{n-1}}$ converge absolument, donc converge car la fonction intégrée est positive. On reconnait là aussi une intégrale de Riemann en $+\infty$ qui converge bien car $n-1>1$. Ainsi $E(Y_n^2)$ existe bien et on a :

$$E(Y_n^2) = \frac{n}{a^n}\int_{1/a}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{n-1}} = \frac{n}{a^n}\lim_{A\to+\infty}\left[\frac{x^{-n+2}}{-n+2}\right]_{1/a}^{A} = \frac{n}{a^n}\frac{a^{n-2}}{n-2} = \frac{n}{(n-2)a^2}.$$

Par la formule de Huygens, $V(Y_n)$ existe et vaut :

$$V(Y_n) = E(Y_n^2) - E(Y_n)^2 = \frac{n}{(n-2)a^2} - \frac{n^2}{(n-1)^2a^2} = \frac{(n-1)^2 - n(n-2)}{(n-2)(n-1)^2}\frac{n}{a^2}$$
$$= \frac{n}{(n-2)(n-1)^2a^2}.$$

4. En suivant la construction des Y_n, on propose la fonction suivante :

```
function y = pareto(a,n)
      x = grand(1,n,'unf',0,a).^(-1) \\ simule n réalisations indép. de X_1
      y = min(x)
endfunction
```

Exercice 14.6 (★★★)
Soit N une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$).
Soit $X_0, X_1, \ldots, X_n$ $n+1$ variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
On suppose que $X_0, X_1, \ldots, X_n, N$ sont mutuellement indépendantes.

1. Soit $k \in \{0,\ldots,n\}$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $T_k = \min(X_0, X_1, \ldots, X_k)$.
2. On pose $T = \min(X_0, X_1, \ldots, X_N)$.
   (a) Montrer que T est une variable aléatoire.
   (b) Montrer que T est une variable à densité et déterminer une densité de T.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$P(T_k > x) = P(X_0 > x, \ldots, X_k > x) = P(X_0 > x)^{k+1} \quad \text{car les va sont indép et de même loi.}$$

On obtient donc :

$$F_{T_k}(x) = 1 - (1 - F_{X_0}(x))^{k+1}.$$

2. (a) Il faut ici se ramener à la définition d'une variable aléatoire réelle : T est une variable aléatoire réelle si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[T \leq x]$ appartient à $\mathscr{A}$, ce qui est équivalent à $[T > x] \in \mathscr{A}$ (puisqu'une tribu est stable par passage au complémentaire). On a, en utilisant

le système complet d'évènements ($[N=k]$) que :

$$\begin{aligned}[T>x] &= \bigcup_{k=0}^{n}[T>x]\cap[N=k] = \bigcup_{k=0}^{n}[T_k>x]\cap[N=k]\\ &= \bigcup_{k=0}^{n}[X_1>x]\cap\cdots\cap[X_k>x]\cap[N=k]\end{aligned}$$

Or $X_1,\dots,X_n$ et N sont des variables aléatoires, donc $[X_j>x]\in\mathscr{A}$ pour tout $j=0,\dots,n$ et $[N=k]\in\mathscr{A}$ aussi. Puisque $\mathscr{A}$ est stable par intersection et union finie ou dénombrable, $[T>x]$ est bien un évènement. Ainsi T est bien une variable aléatoire.

(b) Toujours avec le même SCE, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}F_T(x) &= \sum_{k=0}^{n}P([T\le x]\cap[N=k] = \sum_{k=0}^{n}P([T_k\le x]\cap[N=k])\\ &= \sum_{k=0}^{n}P(T_k\le x)P(N=k) \text{ par indép.}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(1-(1-F_{X_0}(x))^{k+1}\right)P(N=k)\\ &= \sum_{k=0}^{n}P(N=k)-\sum_{k=0}^{n}(1-F_{X_0}(x))^{k+1}P(N=k)\\ &= 1-(1-F_{X_0}(x))\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-F_{X_0}(x))^k p^k(1-p)^{n-k}\\ &= 1-(1-F_{X_0}(x))\left(p-pF_{X_0}(x)+(1-p)\right)^n = 1-(1-F_{X_0}(x))\left(1-pF_{X_0}(x)\right)^n\end{aligned}$$

Par composée et somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, F_T est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf ENFP. Donc T est bien une variable à densité.

Précisons l'expression de F_T. On a $F_T(x)=0$ si $x\ge 0$

$$F_T(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\le 0\\ 1-(1-x)(1-px) & \text{si } 0<x<1\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}$$

D'où pour tout $x\ne 0,1$:

$$F_T(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ (1-px)+p(1-x) & \text{si } 0<x<1\\ 0 & \text{si } x>0\end{cases}$$

Une densité de T est donc :

$$f_T : x\in\mathbb{R}\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x\le 0\\ 1+p-2px & \text{si } 0<x<1\\ 0 & \text{si } x\ge 0\end{cases}.$$

Exercice 14.7 (★★★★ - QSP HEC 2015)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$ de même loi exponentielle de paramètre $a>0$.
Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, on définit la variable aléatoire N_x par :

$$\forall\omega\in\Omega,\quad N_x(\omega)=\begin{cases}\min(k\in\mathbb{N}^*,\ X_k(\omega)>x) \text{ si cet ensemble n'est pas vide}\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}.$$

1. Déterminer la loi de N_x et préciser son espérance $E(N_x)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} P(N_x > E(N_x))$.

1. Notons tout d'abord que $N_x(\Omega) = \mathbb{N}$ (puisqu'on fait un minimum sur des entiers !). On a :

$$\begin{aligned} P(N_x = 0) &= P\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} [X_k \leq x]\right) = \lim_{N\to+\infty} P(\bigcap_{k=1}^{N} X_k \leq x) \\ &= \lim_{N\to+\infty} P(X_1 \leq x)^N \text{ car les va sont indép.} \\ &= 0 \quad \text{car} \quad 0 \leq P(X_1 \leq x) < 1 \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité d'évènements :

$$[N_x = k] = [X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x] \cap \dots \cap [X_{k-1} \leq x] \cap [X_k > x]$$

puisque $k = \min(k \in \mathbb{N}^*,\ X_k(\omega) > x)$. Comme les variables X_i sont indépendantes, on obtient :

$$\begin{aligned} P(N_x = k) &= P(X_1 \leq x) \dots P(X_{k-1} \leq x) P(X_k > x) \\ &= P(X_1 \leq x)^{k-1}(1 - P(X_1 \leq x)). \end{aligned}$$

Ainsi N_x suit une loi géométrique de paramètre $1 - F_{X_1}(x) = e^{-ax}$. En particulier, $E(N_x)$ existe et vaut $\dfrac{1}{1 - F_{X_1}(x)} = e^{ax}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Notons $n = \lfloor \frac{1}{1-F_{X_1}(x)} \rfloor + 1$. On a :

$$\begin{aligned} P(N_x > E(N_x)) &= \sum_{k=n}^{+\infty} P(N_x = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} F_{X_1}(x)^{k-1}(1 - F_{X_1}(x)) \\ &= (1 - F_{X_1}(x)) \frac{F_{X_1}(x)^{n-1}}{1 - F_{X_1}(x)} = F_{X_1}(x)^{n-1} = \exp\left((n-1)\ln(F_{X_1}(x))\right) \end{aligned}$$

On a $n - 1 = \lfloor \frac{1}{1-F_{X_1}(x)} \rfloor$ et donc :

$$n - 1 \leq \frac{1}{1 - F_{X_1}(x)} < n.$$

En particulier on obtient :

$$\frac{1}{1 - F_{X_1}(x)} - 1 < n - 1 \leq \frac{1}{1 - F_{X_1}(x)}.$$

Puisque $\ln(F_{X_1}(x)) \leq 0$, on en déduit :

$$\frac{\ln(F_{X_1}(x))}{1 - F_{X_1}(x)} - \ln(F_{X_1}(x)) > (n-1)\ln(F_{X_1}(x)) \geq \frac{\ln(F_{X_1}(x))}{1 - F_{X_1}(x)}.$$

Or lorsque $x \to +\infty$, on a $F_{X_1}(x) \to 1$, et donc $\ln(F_{X_1}(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} F_{X_1}(x) - 1$. Ainsi on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(F_{X_1}(x))}{1 - F_{X_1}(x)} = -1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(F_{X_1}(x))}{1 - F_{X_1}(x)} - \ln(F_{X_1}(x)).$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} (n-1)\ln(F_{X_1}(x)) = -1$. Par continuité de l'exponentielle, on peut donc conclure que :

$$\lim_{x\to+\infty} P(N_x > E(N_x)) = e^{-1}.$$

Vecteurs aléatoires, fonction d'un vecteur

Exercice 14.8 (★★)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 3$). On tire simultanément trois boules dans l'urne, et on note X_1 le plus petit des trois numéros, X_3 le plus grand et X_2 le numéro intermédiaire.

1. Déterminer la loi de (X_1, X_2, X_3).
2. En déduire la loi de X_2, puis son espérance.

Exercice 14.9 (★★)

Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Montrer que $\dfrac{X+Y}{1+Z}$ admet une espérance, et la déterminer.

Exercice 14.10 (★★★★ - QSP HEC 2008)

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On considère n variables aléatoires à densité, de même loi et indépendantes $X_1, \ldots, X_n$. On note F la fonction de répartition et f une densité des X_i.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $(Y_1(\omega), Y_2(\omega), \ldots, Y_n(\omega))$ la suite des $X_i(\omega)$ pour $1 \leq i \leq n$ réordonnés par ordre croissant. On a donc $Y_1(\omega) \leq Y_2(\omega) \leq \cdots \leq Y_n(\omega)$ pour tout ω de Ω.

1. Si $1 \leq k \leq n$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que :
$$P([Y_k \leq x]) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1-F(x))^{n-j}.$$
2. En déduire que Y_k admet une densité qu'on explicitera sans le signe $\sum$.

1. Fixons $x \in \mathbb{R}$. On définit une variable aléatoire N_x en posant pour tout $\omega \in \Omega$, $N_x(\omega)$ le nombre d'indices $k \in [\![1, n]\!]$ tels que $X_k(\omega) \leq x$. N_x correspond donc au nombre de succès lors d'une répétition de n épreuves de Bernoulli identiques (car les X_k suivent la même loi) avec probabilité de succès $p = P(X_1 \leq x)$, et indépendantes (car les X_k sont indépendantes). Donc N_x suit une loi binomiale de paramètres n et p.

   D'autre part puisque les Y_i sont ordonnés, l'évènement $[Y_k \leq x]$ est réalisé si et seulement si au moins k variables parmi $(X_1, \ldots, X_n)$ sont inférieures à x, soit si et seulement si $[N_x \geq k]$ est réalisé. Ainsi on a :
$$\begin{aligned} P(Y_k \leq x) = P(N_x \geq k) &= \sum_{j=k}^{n} P(N_x = j) \\ &= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \\ &= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1-F(x))^{n-j} \end{aligned}$$
2. On a obtenu l'expression de la fonction de répartition F_k de Y_k à la question précédente. En particulier F_k est combinaison linéaire, somme et produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (car F l'est). Donc F_k est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est de plus $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points pour les mêmes raisons (car F l'est). Donc Y_k est à densité.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ où F est dérivable, on a :

$$\begin{aligned}
F_k'(x) &= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} j f(x) F(x)^{j-1}(1-F(x))^{n-j} - \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j}(n-j) f(x) F(x)^{j}(1-F(x))^{n-j-1} \\
&= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} j f(x) F(x)^{j-1}(1-F(x))^{n-j} - \sum_{j=k}^{n-1} \binom{n}{j}(n-j) f(x) F(x)^{j}(1-F(x))^{n-j-1} \\
&= nf(x) \sum_{j=k}^{n} \binom{n-1}{j-1} F(x)^{j-1}(1-F(x))^{n-j} - nf(x) \sum_{j=k}^{n-1} \binom{n-1}{j} F(x)^{j}(1-F(x))^{n-j-1} \\
&= nf(x) \left(\sum_{j=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{j} F(x)^{j}(1-F(x))^{n-j-1} - \sum_{j=k}^{n-1} \binom{n-1}{j} F(x)^{j}(1-F(x))^{n-j-1} \right) \\
&= nf(x) \binom{n-1}{k-1} F(x)^{k-1}(1-F(x))^{n-k}
\end{aligned}$$

Une densité de Y_k est donc :

$$f_k : x \in \mathbb{R} \mapsto nf(x) \binom{n-1}{k-1} F(x)^{k-1}(1-F(x))^{n-k}.$$

Somme de variables aléatoires

Exercice 14.11 (★)
Soient X_1, X_2, X_3 des variables indépendantes de loi $\mathscr{E}(\lambda)$, et soit $T = X_1 + X_2 + X_3$. Calculer $P(T > 1)$.

Exercice 14.12 (★★)
On désigne par p un réel de $]0,1[$. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, indépendantes, dont la loi commune est donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par : $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = -1) = 1 - p$.

1. On pose $Y_n = aX_n + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   Déterminer a et b pour que Y_n suive une loi de Bernoulli de paramètre p.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Déterminer la loi de S_n.
3. *Application.* Un supporter du PSG alcoolisé sort d'un bar. À chaque seconde, il avance d'un mètre en se déplaçant d'un mètre vers la gauche avec la probabilité p, et d'un mètre vers la droite avec la probabilité $1 - p$.
   (a) Donner la loi de son abscisse à l'instant $t = n$ secondes.
   (b) En moyenne, où se trouve-t-il à $t = 10$ secondes ?
   (c) `Scilab`. Proposer une fonction simulant la marche de ce supporter pendant n secondes.
   (d) `Scilab`. Proposer un script qui représente la trajectoire de ce supporter pendant 1000 secondes.

Exercice 14.13 (★★ - Loi du χ^2)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi normale centrée réduite. On note $Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

1. Montrer que $\frac{1}{2} X_1^2$ suit une loi usuelle que l'on déterminera.
2. En déduire la loi de Z.

Exercice 14.14 (★★ - Loi binomiale négative)
On considère une expérience ayant probabilité p de réussite, et $1-p$ d'échouer.
On répète l'expérience jusqu'à obtenir m succès, et on note X le nombre d'essais nécessaires.
On note également X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'expérience i a été un succès, et 0 sinon.

1. Reconnaitre la loi de X lorsque $m=1$.
2. Déterminer la loi de X_i.
3. Écrire l'évènement $[X=k]$ en fonction d'évènements formés à partir des variables aléatoires $X_1+\cdots+X_{k-1}$ et X_k.
4. En déduire la loi de X dans le cas général.
5. En écrivant X comme somme de m variables aléatoires suivant une loi usuelle, déterminer l'espérance de X.

Exercice 14.15 (★★ - Loi Γ à deux paramètres - ✍)
Soient b et ν deux réels strictement positifs. On définit la fonction

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{t^{\nu-1}e^{-\frac{t}{b}}}{b^\nu \Gamma(\nu)} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X admettant pour densité f, et on dit que X suit la loi Γ de paramètres b et ν, et on écrit $X \hookrightarrow \Gamma(b,\nu)$.

2. Quelle est la loi de $\dfrac{1}{b}X$? Quelle est la loi de X si $\nu = 1$?
3. Reconnaitre la loi $\Gamma(1,\nu)$.
4. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, X admet un moment d'ordre k, et le calculer. Vérifier que $E(X) = b\nu$ et $V(X) = b^2\nu$.
5. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telles que $X_1 \hookrightarrow \Gamma(b,\nu_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \Gamma(b,\nu_2)$. Montrer que $X_1+X_2 \hookrightarrow \Gamma(b,\nu_1+\nu_2)$.
   On pourra commencer par considérer la loi de $\frac{X_1}{b}+\frac{X_2}{b}$.
6. Plus généralement, si $X_1,\dots,X_n$ sont n variables mutuellement indépendantes telles que $X_i \hookrightarrow \Gamma(b,\nu_i)$, montrer que $X_1+\cdots+X_n \hookrightarrow \Gamma(b,\nu_1+\cdots+\nu_n)$.
7. Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes sur (Ω, A, P) suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$. Montrer que $X_1+\cdots+X_n$ suit la loi $\Gamma(\frac{1}{\lambda}, n)$.
8. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{N}(0,1)$. Montrer que Y^2 suit une loi Γ dont on précisera les paramètres.

> 1. f est bien continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, et positive sur $\mathbb{R}$. On cherche à présent à montrer que :
> $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b^\nu\Gamma(\nu)}\int_0^{+\infty} t^{\nu-1}e^{-t/b}\,\mathrm{d}t \qquad (*)$$
> converge et vaut 1. C'est l'intégrale d'une fonction continue sur $]0,+\infty[$, elle est donc généralisée en 0 et en $+\infty$.
>
> Posons pour cela $x = \frac{t}{b}$. C'est un changement de variables affine donc licite. On a $\mathrm{d}t = b\mathrm{d}x$ et $x : 0 \to +\infty$ lorsque $t : 0 \to +\infty$. Par le théorème de changement de variables, l'intégrale $(*)$ est de même nature que l'intégrale :
> $$\int_0^{+\infty} (bx)^{\nu-1}e^{-x}b\mathrm{d}x = b^\nu \int_0^{+\infty} x^{\nu-1}e^{-x}\mathrm{d}x.$$

On reconnait ici une intégrale $\Gamma(\nu)$ qui converge car $\nu > 0$. On peut donc conclure que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b^\nu \Gamma(\nu)} b^\nu \Gamma(\nu) = 1.$$

Ainsi f est bien une densité de probabilité.

2. $Y = \dfrac{1}{b}X$ est une variable à densité par transformation affine d'une variable à densité, et une densité de Y est donnée par (formule du cours) :

$$f_Y : t \mapsto bf(bt) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

Ainsi Y suit une loi $\gamma(\nu)$.

Si $\nu = 1$, alors on a :

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{1}{b} t^{\nu-1} e^{-t/b} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

On reconnait la densité d'une loi $\mathscr{E}(\frac{1}{b})$. Donc X suit dans ce cas une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{b}$.

3. La loi $\Gamma(1, \nu)$ n'est autre que la loi $\Gamma(\nu)$.

4. Utilisons que $Y = \dfrac{1}{b}X$ suit une loi $\gamma(\nu)$. Y admet un moment d'ordre k si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu+k-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

converge absolument, soit si et seulement si cette intégrale converge puisque la fonction intégrée est positive. Or on reconnait ici une intégrale d'une fonction gamma. Elle converge donc et elle vaut $\dfrac{\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\nu)}$. Ainsi Y admet un moment d'ordre k qui vaut :

$$E(Y^k) = \frac{\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\nu)} = \frac{(\nu+k-1)(\nu+k-2)\dots(\nu+1)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu)} = (\nu+k-1)(\nu+k-2)\dots\nu.$$

On en déduit par linéarité que X admet un moment d'ordre k qui vaut :

$$E(X) = b^k E(Y) = b^k(\nu+k-1)(\nu+k-2)\dots\nu.$$

En particulier, on a :

$$E(X) = b\nu \quad \text{et} \quad E(X^2) = (\nu+1)\nu b^2$$

et donc par la formule de Huygens :

$$V(X) = (\nu+1)\nu b^2 - b^2\nu^2 = \nu b^2$$

5. Puisque X_1 et X_2 sont indépendantes, il en est de même de $\dfrac{X_1}{b}$ et de $\dfrac{X_2}{b}$ par le lemme de coalition. De plus ces variables suivent une loi $\gamma(\nu_1)$ et $\gamma(\nu_2)$. Par stabilité de la loi Gamma, on en déduit que $\dfrac{1}{b}(X_1 + X_2)$ suit une loi $\gamma(\nu_1 + \nu_2) = \Gamma(1, \nu_1 + \nu_2)$. D'après la question 2., on en déduit que $X_1 + X_2$ suit la loi $\Gamma(b, \nu_1 + \nu_2)$.

6. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Init. Si $n = 1$, c'est immédiat. Donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

Hér. Soit $n \geq 1$ et supposons la propriété vraie au rang n. Montrons la au rang $n+1$.

Par hypothèse de récurrence, $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi $\Gamma(b, \nu_1 + \cdots + \nu_n)$. Par le lemme de coalition, $X_1 + \cdots + X_n$ est indépendante de X_{n+1}. Enfin en utilisant la question précédente, on en déduit que :

$$X_1 + \cdots + X_n + X_{n+1} = (X_1 + \cdots + X_n) + X_{n+1} \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1 + \cdots + \nu_n + \nu_{n+1}).$$

On obtient donc le résultat voulu par principe de récurrence.

7. Soient $X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes suivant une loi $\mathscr{E}(\lambda) = \Gamma(\frac{1}{\lambda}, 1)$. Par la question précédente, on en déduit que $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi $\Gamma(\frac{1}{\lambda}, n)$.

8. On a vu à l'exercice 13 (à refaire si nécessaire) que $\dfrac{Y^2}{2}$ suit une loi $\gamma(1/2) = \Gamma(1, \frac{1}{2})$. On en déduit par la question 2 que Y^2 suit une loi $\Gamma(2, \frac{1}{2})$.

Exercice 14.16 (★★★★ - Oral ESCP 2014)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $U_n = \displaystyle\min_{1\leq k\leq n} X_k$

1. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Déterminer la loi de U_n.
   (b) Donner une densité de S_n. Montrer que pour tout $x > 0$,
   $$P(S_n > x) = e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k x^k}{k!}.$$
2. Soit N une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendante des (X_i) et qui suit la loi géométrique de paramètre p, avec $0 < p < 1$. On définit S et U par :

   pour tout $\omega \in \Omega$, $S(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega)$ et $U(\omega) = U_{N(\omega)}(\omega)$.

   On admet que S et U sont des variables aléatoires.
   (a) Montrer que U est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de U.
   (b) Déterminer la loi de S.

1. (a) On a déjà fait ce calcul (voir cours par exemple), on montre que U_n suit une loi $\mathscr{E}(n\lambda)$.
   (b) Là aussi, le calcul a déjà été fait (voir cours). On montre que $S_n \hookrightarrow \Gamma(\frac{1}{\lambda}, n)$. On en déduit que pour tout $x > 0$:
   $$P(S_n > x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_x^{+\infty} t^{n-1} e^{-\lambda t} \, dt.$$
   Soit $A > x$. On fait une intégration par partie :
   $$\begin{array}{c|ccc}
   + & t^{n-1} & & e^{-\lambda t} \\
    & & \searrow & \\
   - & (n-1)t^{n-2} & & -\dfrac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \\
    & & \searrow & \\
   \vdots & \vdots & & \dfrac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} \\
   -1)^{n-1} & (n-1)! & & \vdots \\
    & & \searrow & \\
   (-1)^n & 0 & \longleftarrow & (-1)^n \dfrac{e^{-\lambda t}}{\lambda^n}
   \end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto t^{n-1}$ et $t \mapsto e^{-\lambda t}$ sont de classe $\mathscr{C}^n$. On obtient donc :

$$\int_x^A t^{n-1}e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^{n-1}\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} - (n-1)t^{n-2}\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} - \cdots - \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}t^{n-k}\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^k} - \cdots - (n-1)!\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^n}\right]_x^A$$

$$\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}x^{n-1-k}\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^{k+1}}$$

par croissances comparées. On en déduit que :

$$P(S_n > x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}x^{n-1-k}\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^{n-1-k}}{(n-k-1)!}x^{n-1-k}e^{-\lambda x} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{i!}x^i e^{-\lambda x}$$

2. (a) On cherche la fonction de répartition de U. Notons tout d'abord que $U \in]0,+\infty[$ presque surement, et donc que $F_U(x) = 0$ si $x \leq 0$. Soit $x > 0$. On applique la FPT avec le SCE $([N=n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ (on pourra toujours procéder de cette manière dans cette situation).

$$\begin{aligned}
F_U(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P([U \leq x] \cap [N=n]) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P([U_n \leq x] \cap [N=n]) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n \leq x)P(N=n) \qquad \text{par indép.} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}(1 - e^{-\lambda n x}P(N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n) - \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda n x}(1-p)^{n-1}p \\
&= 1 - e^{-\lambda x}p\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-\lambda x}(1-p))^{n-1} \\
&= 1 - e^{-\lambda x}p\frac{1}{1-e^{-\lambda x}(1-p)} \\
&= \frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}(1-p)}
\end{aligned}$$

Ainsi la fonction de répartition de U est donnée par :

$$F_U : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}(1-p)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On vérifie que cette fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ (il faut étudier notamment ce qui se passe en 0), et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé de 0. Donc U est à densité.

Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$F_U'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x}(1-p)) + (1-e^{-\lambda x})(1-p)\lambda e^{-\lambda x}}{(1-e^{-\lambda x}(1-p))^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Une densité de U est donc :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}((2-p)-(2-2p)e^{-\lambda x})}{(1-e^{-\lambda x}(1-p))^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(b) Puisque $S > 0$ presque surement, on a déjà que $F_S(x) = 0$ pour tout $x \leq 0$. Supposons $x > 0$. On a par la FPT :

$$\begin{aligned}
P(S > x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(S > x,\ N = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(S_n > x,\ N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P(S_n > x)P(N = n) \quad \text{par indépendance} \\
&= e^{-\lambda x} p \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k x^k}{k!} \right) (1-p)^{n-1} \\
&= e^{-\lambda x} p \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k x^k}{k!} (1-p)^{n-1}
\end{aligned}$$

La série double considérée est à termes positifs. De plus elle converge. Elle converge donc absolument, et on peut appliquer Fubini : la somme étant sur un triangle, on a :

$$k : 0 \to +\infty \quad \text{et à } k \text{ fixé,} \quad n : k+1 \to +\infty.$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
P(S > x) &= e^{-\lambda x} p \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k x^k}{k!} (1-p)^{n-1} = e^{-\lambda x} p \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k x^k}{k!} \sum_{n=k+1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} \\
&= e^{-\lambda x} p \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k x^k}{k!} (1-p)^k \frac{1}{1-(1-p)} = e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k x^k}{k!} (1-p)^k \\
&= e^{-\lambda x} e^{\lambda x(1-p)} = e^{-\lambda p x}.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient que $P(S \leq x) = 1 - e^{-\lambda p x}$. S suit donc une loi $\mathscr{E}(\lambda p)$.

Exercice 14.17 (★★★★ - QSP ESCP 2014)

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la variable aléatoire $\frac{1}{S_n}$ admet une espérance, que l'on notera par la suite m_n.
2. Soient $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Déterminer l'espérance de $\frac{S_k}{S_n}$ en fonction de m_n.

1. Puisque les X_i suivent des lois géométriques, on a $S_n \geq 1$ presque surement. Ainsi on a $0 \leq \frac{1}{S_n} \leq 1$ presque surement. Donc $E(\frac{1}{S_n})$ existe par théorème d'existence de l'espérance par domination.
2. On étudie plusieurs cas :
   - Cas $k = n$. Dans ce cas $\frac{S_k}{S_n} = 1$ et son espérance existe et vaut 1.
   - Cas $k \geq n$. On a alors :
   $$\frac{S_k}{S_n} = 1 + \frac{X_{n+1} + \cdots + X_k}{S_n}.$$
   Par lemme de coalition, les variables $X_{n+1} + \cdots + X_k$ et $\frac{1}{S_n}$ sont indépendantes, et admettent toutes les deux une espérance. Par produit de variables indépendantes, $\frac{X_{n+1} + \cdots + X_k}{S_n}$ admet

une espérance et on a :

$$E\left(\frac{X_{n+1}+\cdots+X_k}{S_n}\right)=E(X_{n+1}+\cdots+X_k)E(\frac{1}{S_n})=\frac{k-n}{p}m_n$$

Et donc l'espérance de $\dfrac{S_k}{S_n}$ existe et vaut $1+\dfrac{k-n}{p}m_n$.

- Cas $k<n$. Pour tout $i\in[\![1,k]\!]$, commençons par remarquer que les variables $\dfrac{X_i}{S_n}$ suivent la même loi. Pour le voir, notons d'abord que les vecteurs $(X_1,\dots,X_i,\dots X_n)$ et $(X_i,\dots,X_1,\dots X_n)$ ont même loi (quitte à se ramener à la définition de la loi d'un vecteur du cours). Comme la fonction $g:(x_1,\dots,x_n)\mapsto\dfrac{x_1}{x_1+\cdots+x_n}$ est continue sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ (cette notion sera précisée dans un prochain chapitre), on en déduit (propriété du cours) que :

$$g(X_1,\dots,X_i,\dots,X_n)=\frac{X_1}{X_1+\cdots+X_n}\quad\text{et}\quad g(X_i,\dots,X_1,\dots,X_n)=\frac{X_i}{X_1+\cdots+X_n}$$

ont même loi pour tout i.

De plus pour tout $i\in[\![1,k]\!]$, les variables $\dfrac{X_i}{S_n}$ admettent une espérance puisque $0\leq\dfrac{X_i}{S_n}\leq 1$ (existence de l'espérance par domination). Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned}1=E\left(\frac{S_n}{S_n}\right)&=\sum_{i=1}^n E\left(\frac{X_i}{S_n}\right)\\&=\sum_{i=1}^n E\left(\frac{X_1}{S_n}\right)\qquad\text{car elles sont de même loi}\\&=nE\left(\frac{X_1}{S_n}\right)\end{aligned}$$

Donc on a pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $E\left(\frac{X_i}{S_n}\right)=\dfrac{1}{n}$. Finalement par linéarité de l'espérance, on obtient que :

$$E\left((\frac{S_k}{S_n}\right)=\sum_{i=1}^k E\left(\frac{X_i}{S_n}\right)=\frac{k}{n}$$