TD14

Vecteurs aléatoires

Maximum, minimum

Exercice 14.1 (★)
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi $\mathscr{B}(p)$. Déterminer la loi de $Z = \max(X_1, \dots, X_n)$.

Exercice 14.2 (★)
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi $\mathscr{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$, et soit $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$. Montrer que Z suit une loi usuelle dont on précisera les paramètres. Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.

Exercice 14.3 (★★)
Un sac contient N boules numérotées de 1 à N. On effectue dans ce sac n tirages d'une boule avec remise et on note Z_n le plus petit numéro obtenu. Déterminer la loi de Z_n.

Exercice 14.4 (★ - Minimum et maximum de lois uniformes)
Soit $a > 0$ et soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme $\mathscr{U}([0,a])$. On pose

$$Y = \max(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad Z = \min(X_1, \dots, X_n).$$

Montrer que Y et Z sont des variables aléatoires à densité et en déterminer une densité.

Exercice 14.5 (★★ - Lois uniformes et loi de Pareto)
Soit $n \geq 3$ et soient $Z_1, \dots, Z_n$ des variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant toutes la loi uniforme sur $]0,a]$, $a > 0$. On pose alors $X_i = \dfrac{1}{Z_i}$.

1. Montrer que X_1 est une variable aléatoire à densité, et qu'une densité de X_1 est :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{ax^2} & \text{si } x \geq \frac{1}{a} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Soit $X_n = \min(X_1, \dots, X_n)$. Montrer que X_n est une variable à densité, et qu'une densité de X_n est :

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{n}{a^n x^{n+1}} & \text{si } x \geq \frac{1}{a} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Montrer que X_n admet une espérance et une variance, et les calculer.
4. `Scilab`. Écrire une fonction `pareto` qui simule la loi de X_n pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14.6 (★★★)
Soit N une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$).
Soit $X_0, X_1, \dots, X_n$ $n+1$ variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
On suppose que $X_0, X_1, \dots, X_n, N$ sont mutuellement indépendantes.

1. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $T_k = \min(X_0, X_1, \dots, X_k)$.
2. On pose $T = \min(X_0, X_1, \dots, X_N)$.
   (a) Montrer que T est une variable aléatoire.

(b) Montrer que T est une variable à densité et déterminer une densité de T.

Exercice 14.7 (★★★★ - QSP HEC 2015)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de même loi exponentielle de paramètre $a > 0$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la variable aléatoire N_x par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad N_x(\omega) = \begin{cases} \min(k \in \mathbb{N}^*,\ X_k(\omega) > x) \text{ si cet ensemble n'est pas vide} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

1. Déterminer la loi de N_x et préciser son espérance $E(N_x)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} P(N_x > E(N_x))$.

Vecteurs aléatoires, fonction d'un vecteur

Exercice 14.8 (★★)
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 3$). On tire simultanément trois boules dans l'urne, et on note X_1 le plus petit des trois numéros, X_3 le plus grand et X_2 le numéro intermédiaire.

1. Déterminer la loi de (X_1, X_2, X_3).
2. En déduire la loi de X_2, puis son espérance.

Exercice 14.9 (★★)
Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Montrer que $\dfrac{X+Y}{1+Z}$ admet une espérance, et la déterminer.

Exercice 14.10 (★★★★ - QSP HEC 2008)
Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On considère n variables aléatoires à densité, de même loi et indépendantes $X_1, \dots, X_n$. On note F la fonction de répartition et f une densité des X_i.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $(Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots, Y_n(\omega))$ la suite des $X_i(\omega)$ pour $1 \leq i \leq n$ réordonnés par ordre croissant. On a donc $Y_1(\omega) \leq Y_2(\omega) \leq \cdots \leq Y_n(\omega)$ pour tout ω de Ω.

1. Si $1 \leq k \leq n$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que :
$$P([Y_k \leq x]) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1 - F(x))^{n-j}.$$
2. En déduire que Y_k admet une densité qu'on explicitera sans le signe $\sum$.

Somme de variables aléatoires

Exercice 14.11 (★)
Soient X_1, X_2, X_3 des variables indépendantes de loi $\mathscr{E}(\lambda)$, et soit $T = X_1 + X_2 + X_3$. Calculer $P(T > 1)$.

Exercice 14.12 (★★)
On désigne par p un réel de $]0,1[$. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, indépendantes, dont la loi commune est donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par : $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = -1) = 1 - p$.

1. On pose $Y_n = aX_n + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
   Déterminer a et b pour que Y_n suive une loi de Bernoulli de paramètre p.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Déterminer la loi de S_n.

3. *Application.* Un supporter du PSG alcoolisé sort d'un bar. À chaque seconde, il avance d'un mètre en se déplaçant d'un mètre vers la gauche avec la probabilité p, et d'un mètre vers la droite avec la probabilité $1-p$.

   (a) Donner la loi de son abscisse à l'instant $t = n$ secondes.

   (b) En moyenne, où se trouve-t-il à $t = 10$ secondes ?

   (c) `Scilab.` Proposer une fonction simulant la marche de ce supporter pendant n secondes.

   (d) `Scilab.` Proposer un script qui représente la trajectoire de ce supporter pendant 1000 secondes.

Exercice 14.13 (★★ - Loi du χ^2)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi normale centrée réduite. On note $Z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

1. Montrer que $\frac{1}{2}X_1^2$ suit une loi usuelle que l'on déterminera.

2. En déduire la loi de Z.

Exercice 14.14 (★★ - Loi binomiale négative)
On considère une expérience ayant probabilité p de réussite, et $1-p$ d'échouer.
On répète l'expérience jusqu'à obtenir m succès, et on note X le nombre d'essais nécessaires.
On note également X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'expérience i a été un succès, et 0 sinon.

1. Reconnaitre la loi de X lorsque $m = 1$.

2. Déterminer la loi de X_i.

3. Écrire l'évènement $[X = k]$ en fonction d'évènements formés à partir des variables aléatoires $X_1 + \cdots + X_{k-1}$ et X_k.

4. En déduire la loi de X dans le cas général.

5. En écrivant X comme somme de m variables aléatoires suivant une loi usuelle, déterminer l'espérance de X.

Exercice 14.15 (★★ - Loi Γ à deux paramètres - ✍)
Soient b et ν deux réels strictement positifs. On définit la fonction

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{t^{\nu-1}e^{-\frac{t}{b}}}{b^\nu \Gamma(\nu)} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X admettant pour densité f, et on dit que X suit la loi Γ de paramètres b et ν, et on écrit $X \hookrightarrow \Gamma(b,\nu)$.

2. Quelle est la loi de $\frac{1}{b}X$? Quelle est la loi de X si $\nu = 1$?

3. Reconnaitre la loi $\Gamma(1,\nu)$.

4. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, X admet un moment d'ordre k, et le calculer. Vérifier que $E(X) = b\nu$ et $V(X) = b^2\nu$.

5. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telles que $X_1 \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_2)$. Montrer que $X_1 + X_2 \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1 + \nu_2)$.

   On pourra commencer par considérer la loi de $\frac{X_1}{b} + \frac{X_2}{b}$.

6. Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables mutuellement indépendantes telles que $X_i \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_i)$, montrer que $X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1 + \cdots + \nu_n)$.

7. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes sur (Ω, A, P) suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$. Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\Gamma(\frac{1}{\lambda}, n)$.

8. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{N}(0,1)$. Montrer que Y^2 suit une loi Γ dont on précisera les paramètres.

Exercice 14.16 (★★★★ - Oral ESCP 2014)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $U_n = \min_{1\leq k\leq n} X_k$

1. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Déterminer la loi de U_n.
   (b) Donner une densité de S_n. Montrer que pour tout $x > 0$,
   $$P(S_n > x) = e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k x^k}{k!}.$$

2. Soit N une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendante des (X_i) et qui suit la loi géométrique de paramètre p, avec $0 < p < 1$. On définit S et U par :

   pour tout $\omega \in \Omega$, $S(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega)$ et $U(\omega) = U_{N(\omega)}(\omega)$.

   On admet que S et U sont des variables aléatoires.
   (a) Montrer que U est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de U.
   (b) Déterminer la loi de S.

Exercice 14.17 (★★★★ - QSP ESCP 2014)

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la variable aléatoire $\dfrac{1}{S_n}$ admet une espérance, que l'on notera par la suite m_n.

2. Soient $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Déterminer l'espérance de $\dfrac{S_k}{S_n}$ en fonction de m_n.
