TD15

Fonctions de plusieurs variables

Fonctions de plusieurs variables, continuité

Exercice 15.1 (★)

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer les lignes de niveau λ pour $\lambda \in \{-2,-1,0,1,2,3,4\}$ et les représenter graphiquement. En déduire la représentation graphique de la fonction.

$$(x,y) \mapsto 2x+y+1 \quad ; \quad (x,y) \mapsto x^2 \quad ; \quad (x,y) \mapsto xy \quad ; \quad (x,y) \mapsto 2\sin(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Vérifier les lignes de niveau et la représentation graphique de la fonction en utilisant `Scilab`.

Exercice 15.2 (★★)

Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\sin(x^2+y^2+z^2) & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calcul différentiel

Exercice 15.3 (★)

Pour chacune des fonctions suivantes, montrer qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition, et calculer son gradient.

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto e^{xyz} \end{cases} ; \qquad f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \ln(x^2+y^2+1) \end{cases} ;$$

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto \dfrac{y\exp(z^2)}{x^2+x+1} \end{cases} ; \qquad f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) & \mapsto (x_1^2+\dots+x_n^2)e^{-(x_1^2+\dots+x_n^2)} \end{cases}.$$

Exercice 15.4 (★★)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \displaystyle\int_x^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer ses dérivées partielles.

> Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
> $$g(x,y) = F(xy) - F(x).$$
> Les applications $(x,y) \mapsto xy$ et $(x,y) \mapsto x$ sont polynomiales donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Par composition et somme, on en déduit que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
> $$\partial_1 g(x,y) = yF'(xy) - F'(x) = yf(xy) - f(x) \quad \text{et} \quad \partial_2 g(x,y) = xF'(xy) = xf(xy).$$

Exercice 15.5 (★)
Soit $f : (x,y) \mapsto (x-y)^2 + x^3 + y^3$.

1. Justifier l'existence et écrire le développement limité à l'ordre 1 de la fonction f en un point (a,b) quelconque.
2. Déterminer l'équation du plan affine tangent au graphe de f aux points $(0,-1)$, $(0,0)$ et $(-1,-1)$.
3. Tracer le graphe de f ainsi que les plans tangents aux points $(0,-1)$, $(0,0)$ et $(-1,-1)$ à l'aide du logiciel `Scilab`.

Exercice 15.6 (★)
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 3y - 1.$$

1. Déterminer la dérivée directionnelle de f en $a = (1,-1)$ dans les directions $(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5})$ et $(0,1)$.
2. Même question dans la direction $\dfrac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$.

Exercice 15.7 (★★)
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, et soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $F(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x)$.

1. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que la fonction

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x-y_0, y_0-z_0, z_0-x) \end{cases}$$

   est dérivable en x_0 et déterminer $\varphi'(x_0)$. Que peut-on en déduire sur la dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x de F ?
2. Montrer que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\partial_1(F)(x,y,z) + \partial_2(F)(x,y,z) + \partial_3(F)(x,y,z) = 0.$$

> 1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(a + xu)$ où $a = (-y_0, y_0 - z_0, z_0)$ et $u = (1, 0, -1)$. Puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, on sait que φ est dérivable en x_0 et on a :
>
> $$\varphi'(x_0) = \langle \nabla f(a+x_0u), u\rangle = \partial_1 f(a+x_0u) - \partial_3 f(a+x_0u) = \partial_1 f(x_0-y_0, y_0-z_0, z_0-x_0) - \partial_3 f(x_0-y_0, y_0-z_0, z_0-x_0).$$
>
> Ceci étant vrai pour tout (x_0, y_0, z_0), on en déduit que F admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en tout point de $\mathbb{R}$, et on a :
>
> $$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \partial_1 F(x,y,z) = \partial_1 f(x-y, y-z, z-x) - \partial_3 f(x-y, y-z, z-x).$$
>
> Notons de plus que $\partial_1 F$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ car f est de classe $\mathscr{C}^1$.
>
> 2. En procédant de la même manière, on montre que F admet des dérivées partielles par rapport aux deuxième et troisième variables, et on a pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:
>
> $$\partial_2 F(x,y,z) = \partial_2 f(x-y, y-z, z-x) - \partial_1 f(x-y, y-z, z-x),$$
>
> $$\partial_3 F(x,y,z) = \partial_3 f(x-y, y-z, z-x) - \partial_2 f(x-y, y-z, z-x).$$
>
> Ces dérivées partielles étant continues sur $\mathbb{R}^3$, F est donc de classe $\mathscr{C}^1$, et on a pour tout $(x,y,z) \in$

$\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\partial_1 F(x,y,z)+\partial_2 F(x,y,z)+\partial_3 F(x,y,z) &= \partial_1 f(x-y,y-z,z-x)-\partial_3 f(x-y,y-z,z-x)\\ &\quad+\partial_2 f(x-y,y-z,z-x)-\partial_1 f(x-y,y-z,z-x)\\ &\quad+\partial_3 f(x-y,y-z,z-x)-\partial_2 f(x-y,y-z,z-x)=0\end{aligned}$$

Exercice 15.8 (★★ - Gradient et lignes de niveau)
Soit $f(x,y)=(y-x^2)^3-1$.

1. Montrer que les lignes de niveau de f sont des paraboles.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et déterminer ses dérivées partielles.
3. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_\lambda$ la ligne de niveau λ de f. Soit $(x_0,y_0)\in\mathscr{C}_\lambda$.
   (a) Déterminer un vecteur directeur de la tangente à $\mathscr{C}_\lambda$ en (x_0,y_0).
   (b) Montrer que ce vecteur est orthogonal à $\nabla f(x_0,y_0)$.
4. Vérifier ce résultat à l'aide du logiciel `Scilab`, en traçant sur un même graphique les lignes de niveau et le champ de gradients de f.

Recherche d'extremum

Exercice 15.9 (★)

1. Soit $f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x^2+2x+3y^2-6y+1$.
   (a) Représenter le graphe de f à l'aide de `Scilab`. Déterminer graphiquement le(s) point(s) critique(s) de f. Quel est la nature de ce(s) point(s) critique(s) ?
   (b) Vérifier ces résultats par le calcul.
2. Mêmes questions pour $g:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x^3+y^3-3xy+1$.

Exercice 15.10 (★)
Déterminer les points critiques et les extrema éventuels des fonctions suivantes :

$$f_1:\begin{cases}\mathbb{R}^3 & \to\mathbb{R}\\ (x,y,z) & \mapsto \frac{x^2}{2}+xyz+y-z\end{cases};\qquad f_2:\begin{cases}\mathbb{R}^3 & \to\mathbb{R}\\ (x,y,z) & \mapsto xyz+xy+yz+xz\end{cases}.$$

Exercice 15.11 (★★)
Dans la suite, on considère deux fonctions f et h définies respectivement sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y)=2e^{-x}+3x^2-2xy+y^2 \quad\text{et}\quad h(x)=2e^{-x}+2x^2.$$

1. Montrer que l'équation $e^{-x}-2x=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et admet un unique point critique.
3. Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $f(x,y)\geq h(x)$.
4. Étudier les variations de h et en déduire que f admet un minimum, et exprimer ce minimum en fonction de α.

Exercice 15.12 (★★)
Déterminer si les fonctions suivantes admettent ou non des extrema, et déterminer l'ensemble des points où ces extrema sont atteints.

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4 \end{cases} ;$$

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto x^2 + xy + y^2 \end{cases} ;$$

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto -2x^2 - 2xy - 3y^2 - 4 \end{cases} ;$$

$$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto \frac{x^2}{2} + y^2 + 2z^2 - xy - xz + x^4 \end{cases} .$$

Exercice 15.13 (★★ - Étude d'un extremum par variation de fonctions)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

1. Montrer que f n'admet pas de maximum.
2. On se propose de montrer que f possède un minimum.
   (a) En considérant $f(-x,-y)$, montrer qu'on peut se restreindre à $y \geq 0$.
   (b) Pour $y \geq 0$ fixé, montrer que la fonction $x \mapsto f(x,y)$ admet un minimum noté $g(y)$.
   (c) Étudier les variations de $y \mapsto g(y)$ et en déduire que f admet un minimum, et préciser le(s) point(s) où ce minimum est atteint.

Exercice 15.14 (★★)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ et déterminer son gradient.
2. Montrer que $(0,0)$ est un point critique de f et que f admet quatre autres points critiques, de la forme (a,b), $(-a,b)$, $(a,-b)$, $(-a,-b)$, avec $a > 0, b > 0$.
3. Déterminer la nature du point critique $(0,0)$.
4. On souhaite étudier la nature de (a,b). Pour cela, on cherche à déterminer le signe de $f(x,y) - f(a,b)$.
   (a) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que $f(x,y) - f(a,b) = \dfrac{P(x,y)}{4(1+x^2)(1+y^2)}$ où $x \mapsto P(x,y)$ est un polynôme de degré 2 dont on calculera son discriminant $\Delta(y)$.
   (b) Montrer que la fonction Δ est de signe constant.
   (c) Conclure.
5. Déterminer de même la nature des trois autres points critiques.
6. Dresser le tableau de variations de $g : t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$. Retrouver alors les résultats précédents.

Exercice 15.15 (★★)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = (x+y+z)e^{-\frac{1}{6}(x^2+y^2+z^2)}$$

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et déterminer ses points critiques.
2. Montrer que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $|x+y+z| \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
3. En étudiant la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(t) = \sqrt{t}e^{-t/6}$, déterminer la nature des points critiques de f.

Exercice 15.16 (★★)
Soit a et b deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ et f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \langle x,a\rangle^2 + \langle x,b\rangle^2.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer les dérivées partielles de f. En déduire une expression du gradient de f.
2. Déterminer l'ensemble des points critiques de f.
3. Étudier les extrema de f.

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:
$$f(x) = \langle x, a\rangle^2 + \langle x, b\rangle^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n b_j x_j\right)^2$$
f est polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Et on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:
$$\partial_k f(x) = 2a_k \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) + 2b_k \left(\sum_{j=1}^n b_j x_j\right) = 2a_k\langle a, x\rangle + 2b_k\langle b, x\rangle.$$
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:
$$\begin{aligned}\nabla f(x) &= (2a_1\langle a, x\rangle + 2b_1\langle b, x\rangle, \dots, 2a_n\langle a, x\rangle + 2b_n\langle b, x\rangle)\\ &= 2\langle a, x\rangle(a_1, \dots, a_n) + 2\langle b, x\rangle(b_1, \dots, b_n) = 2\langle a, x\rangle a + 2\langle b, x\rangle b.\end{aligned}$$
2. $x \in \mathbb{R}^n$ est un point critique si et seulement si :
$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b = 0.$$
Puisque a et b ne sont pas colinéaires, c'est équivalent à $\begin{cases}\langle a, x\rangle = 0\\ \langle b, x\rangle = 0\end{cases}$, soit encore à $x \in \mathrm{Vect}(a, b)^\perp$.
Ainsi l'ensemble des points critiques est $\mathrm{Vect}(a, b)^\perp$.
3. Soit c un point critique de f. Alors c est orthogonal à a et b et on a :
$$f(c) = 0 \leq \langle x, a\rangle^2 + \langle x, b\rangle^2 = f(x)$$
pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Ainsi f admet un minimum global qui vaut 0, atteint en chacun des points critiques de f, c'est à dire en tout point de $\mathrm{Vect}(a, b)^\perp$.

Exercice 15.17 (★★★)
Soit $n \geq 1$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :
$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right)^2.$$
1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et qu'elle possède un unique point critique $a = (a_1, \dots, a_n)$.
2. Pour $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, expliciter $f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n)$, et en déduire la nature du point critique a.

Exercice 15.18 (★★★★ - Fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$ - Oral ESCP 2001 - ✍)
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire étant noté $\langle \cdot, \cdot\rangle$ et la norme associée $\|\cdot\|$.
Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, convexe, c'est-à-dire vérifiant pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et pour tout réel $\lambda \in [0, 1]$:
$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$
Pour tout $(h, x) \in (\mathbb{R}^n)^2$ fixé, on définit la fonction $\varphi_{h,x}$ de la variable réelle t par :
$$\varphi_{h,x}(t) = f(x + th).$$
1. (a) Montrer que $\varphi_{h,x}$ est une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que $\varphi'_{h,x}(0) \leq \varphi_{h,x}(1) - \varphi_{h,x}(0)$.

2. Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a
$$\langle \nabla f(x), y - x\rangle \leq f(y) - f(x).$$

3. On suppose dans cette question que $f(0) = 0$ et que $\nabla f(0) = 0$. On suppose également que f est strictement convexe, c'est-à-dire qu'elle vérifie pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tels que $x \neq y$, pour tout réel $\lambda \in]0, 1[$:
$$f((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(0) \leq f(x)$, puis que si $x \neq 0$, alors $f(x) \neq 0$.

1. (a) Pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a :
$$\begin{aligned}\varphi_{h,x}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= f(x + (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)h)\\ &= f((\lambda + 1 - \lambda)x + \lambda t_1 h + (1-\lambda)t_2 h)\\ &= f(\lambda(x + t_1 h) + (1-\lambda)(x + t_2 h))\\ &\leq \lambda f(x + t_1 h) + (1-\lambda)f(x + t_2 h) \qquad \text{car } f \text{ convexe.}\\ &\leq \lambda\varphi_{h,x}(t_1) + (1-\lambda)\varphi_{h,x}(t_2)\end{aligned}$$
Donc $\varphi_{h,x}$ est bien convexe.

   (b) Puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$, on sait par le cours que $\varphi_{h,x}$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Comme de plus $\varphi_{h,x}$ est convexe, son graphe est au dessus de ses tangentes. En particulier, la tangente en 0 d'équation $y = \varphi'_{h,x}(0)(t - 0) + \varphi_{h,x}(0)$ est en dessous de son graphe, soit pour $t = 1$:
$$\varphi'_{h,x}(0) \times 1 + \varphi_{h,x}(0) \leq \varphi_{h,x}(1) \quad \Rightarrow \quad \varphi'_{h,x}(0) \leq \varphi_{h,x}(1) - \varphi_{h,x}(0).$$

2. Or par le cours on a :
$$\varphi'_{h,x}(0) = \langle \nabla f(x), h\rangle$$
et donc par la question précédente :
$$\langle \nabla f(x), h\rangle \leq f(x + h) - f(x).$$
Ceci étant vrai pour tout $(x, h) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on en déduit que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ (en posant $h = y - x$) :
$$\langle \nabla f(x), y - x\rangle \leq f(y) - f(x).$$

3. Supposons que $f(0) = 0$ et que $\nabla f(0) = (0, \dots, 0)$. Par la question précédente, on obtient que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ (avec $x = 0$) :
$$f(0) = 0 = \langle \nabla f(0), y\rangle \leq f(y) - f(0) = f(y).$$
Ainsi f admet un minimum global en $0 \in \mathbb{R}^n$. Montrons que ce minimum global est atteint uniquement en ce point. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x \neq 0$ et $f(x) = 0$. Alors pour tout $\lambda \in]0, 1[$, on a :
$$f(\lambda x) = f((1-\lambda)0 + \lambda x) < (1-\lambda)f(0) + \lambda f(x) = 0.$$
Or ceci contredit le résultat obtenu précédemment, puisqu'on a montré que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $f(y) \geq 0$. Ainsi on a bien que pour tout $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$. f admet donc un minimum global atteint en un unique point qui est $0 \in \mathbb{R}^n$.