

Fonctions de plusieurs variables

Fonctions de plusieurs variables, continuité

Exercice 15.1 (★)

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer les lignes de niveau λ pour $\lambda \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ et les représenter graphiquement. En déduire la représentation graphique de la fonction.

$$(x, y) \mapsto 2x + y + 1 \quad ; \quad (x, y) \mapsto x^2 \quad ; \quad (x, y) \mapsto xy \quad ; \quad (x, y) \mapsto 2 \sin(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Vérifier les lignes de niveau et la représentation graphique de la fonction en utilisant `Scilab`.

Exercice 15.2 (★★)

Étudier la continuité de la fonction f définie sur \mathbb{R}^3 par :

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \sin(x^2 + y^2 + z^2) & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calcul différentiel

Exercice 15.3 (★)

Pour chacune des fonctions suivantes, montrer qu'elle est de classe \mathcal{C}^1 sur son ensemble de définition, et calculer son gradient.

$$\left. \begin{array}{l} f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto e^{xyz} \end{cases} ; \\ f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto \frac{y \exp(z^2)}{x^2 + x + 1} \end{cases} \end{array} \right| \begin{array}{l} f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \ln(x^2 + y^2 + 1) \end{cases} ; \\ f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto (x_1^2 + \dots + x_n^2) e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} \end{cases} \end{array}$$

Exercice 15.4 (★★)

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} et soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \int_x^{xy} f(t) dt$.

Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et déterminer ses dérivées partielles.

Exercice 15.5 (★)

Soit $f : (x, y) \mapsto (x - y)^2 + x^3 + y^3$.

1. Justifier l'existence et écrire le développement limité à l'ordre 1 de la fonction f en un point (a, b) quelconque.
2. Déterminer l'équation du plan affine tangent au graphe de f aux points $(0, -1)$, $(0, 0)$ et $(-1, -1)$.
3. Tracer le graphe de f ainsi que les plans tangents aux points $(0, -1)$, $(0, 0)$ et $(-1, -1)$ à l'aide du logiciel `Scilab`.

Exercice 15.6 (★)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 3y - 1.$$

- Déterminer la dérivée directionnelle de f en $a = (1, -1)$ dans les directions $(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5})$ et $(0, 1)$.
- Même question dans la direction $\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$.

Exercice 15.7 (★★)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^3 , et soit F la fonction définie sur \mathbb{R}^3 par $F(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$.

- Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que la fonction

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x - y_0, y_0 - z_0, z_0 - x) \end{cases}$$

est dérivable en x_0 et déterminer $\varphi'(x_0)$. Que peut-on en déduire sur la dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x de F ?

- Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\partial_1(F)(x, y, z) + \partial_2(F)(x, y, z) + \partial_3(F)(x, y, z) = 0.$$

Exercice 15.8 (★★ - Gradient et lignes de niveau)

Soit $f(x, y) = (y - x^2)^3 - 1$.

- Montrer que les lignes de niveau de f sont des paraboles.
- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 , et déterminer ses dérivées partielles.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note \mathcal{C}_λ la ligne de niveau λ de f . Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}_\lambda$.
 - Déterminer un vecteur directeur de la tangente à \mathcal{C}_λ en (x_0, y_0) .
 - Montrer que ce vecteur est orthogonal à $\nabla f(x_0, y_0)$.
- Vérifier ce résultat à l'aide du logiciel **Scilab**, en traçant sur un même graphique les lignes de niveau et le champ de gradients de f .

Recherche d'extremum**Exercice 15.9 (★)**

- Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + 2x + 3y^2 - 6y + 1$.

- Représenter le graphe de f à l'aide de **Scilab**. Déterminer graphiquement le(s) point(s) critique(s) de f . Quel est la nature de ce(s) point(s) critique(s) ?
- Vérifier ces résultats par le calcul.

- Mêmes questions pour $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 + y^3 - 3xy + 1$.

Exercice 15.10 (★)

Déterminer les points critiques et les extrema éventuels des fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto \frac{x^2}{2} + xyz + y - z \end{cases} ; \quad \left| \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto xyz + xy + yz + xz \end{cases}.$$

Exercice 15.11 (★★)

Dans la suite, on considère deux fonctions f et h définies respectivement sur \mathbb{R}^2 et \mathbb{R} par

$$f(x, y) = 2e^{-x} + 3x^2 - 2xy + y^2 \quad \text{et} \quad h(x) = 2e^{-x} + 2x^2.$$

1. Montrer que l'équation $e^{-x} - 2x = 0$ admet une unique solution α sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 et admet un unique point critique.
3. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \geq h(x)$.
4. Étudier les variations de h et en déduire que f admet un minimum, et exprimer ce minimum en fonction de α .

Exercice 15.12 (★★)

Déterminer si les fonctions suivantes admettent ou non des extrema, et déterminer l'ensemble des points où ces extrema sont atteints.

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4 \end{cases} ; \quad f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto -2x^2 - 2xy - 3y^2 - 4 \end{cases} ;$$

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x^2 + xy + y^2 \end{cases} ; \quad f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto \frac{x^2}{2} + y^2 + 2z^2 - xy - xz + x^4 \end{cases}.$$

Exercice 15.13 (★★ - Étude d'un extremum par variation de fonctions)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

1. Montrer que f n'admet pas de maximum.
2. On se propose de montrer que f possède un minimum.
 - (a) En considérant $f(-x, -y)$, montrer qu'on peut se restreindre à $y \geq 0$.
 - (b) Pour $y \geq 0$ fixé, montrer que la fonction $x \mapsto f(x, y)$ admet un minimum noté $g(y)$.
 - (c) Étudier les variations de $y \mapsto g(y)$ et en déduire que f admet un minimum, et préciser le(s) point(s) où ce minimum est atteint.

Exercice 15.14 (★★)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \frac{xy}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

1. Montrer que f est \mathcal{C}^1 et déterminer son gradient.
2. Montrer que $(0, 0)$ est un point critique de f et que f admet quatre autres points critiques, de la forme (a, b) , $(-a, b)$, $(a, -b)$, $(-a, -b)$, avec $a > 0, b > 0$.
3. Déterminer la nature du point critique $(0, 0)$.
4. On souhaite étudier la nature de (a, b) . Pour cela, on cherche à déterminer le signe de $f(x, y) - f(a, b)$.
 - (a) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que $f(x, y) - f(a, b) = \frac{P(x, y)}{4(1+x^2)(1+y^2)}$ où $x \mapsto P(x, y)$ est un polynôme de degré 2 dont on calculera son discriminant $\Delta(y)$.
 - (b) Montrer que la fonction Δ est de signe constant.
 - (c) Conclure.
5. Déterminer de même la nature des trois autres points critiques.
6. Dresser le tableau de variations de $g : t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$. Retrouver alors les résultats précédents.

Exercice 15.15 (★★)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y, z) = (x + y + z)e^{-\frac{1}{6}(x^2 + y^2 + z^2)}$$

1. Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^3 et déterminer ses points critiques.
 2. Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $|x + y + z| \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
 3. En étudiant la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $h(t) = \sqrt{t}e^{-t/6}$, déterminer la nature des points critiques de f .
-

Exercice 15.16 (★★)

Soit a et b deux vecteurs non colinéaires de \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) et f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \langle x, a \rangle^2 + \langle x, b \rangle^2.$$

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 et calculer les dérivées partielles de f . En déduire une expression du gradient de f .
 2. Déterminer l'ensemble des points critiques de f .
 3. Étudier les extrema de f .
-

Exercice 15.17 (★★★)

Soit $n \geq 1$ et soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^n par :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right)^2.$$

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n et qu'elle possède un unique point critique $a = (a_1, \dots, a_n)$.
 2. Pour $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, expliciter $f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n)$, et en déduire la nature du point critique a .
-

Exercice 15.18 (★★★★ - Fonctions convexes sur \mathbb{R}^n - Oral ESCP 2001 - 📖)

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. L'espace vectoriel \mathbb{R}^n est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire étant noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée $\|\cdot\|$.

Soit f une application de classe \mathcal{C}^1 définie sur \mathbb{R}^n , à valeurs dans \mathbb{R} , convexe, c'est-à-dire vérifiant pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et pour tout réel $\lambda \in [0, 1]$:

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Pour tout $(h, x) \in (\mathbb{R}^n)^2$ fixé, on définit la fonction $\varphi_{h,x}$ de la variable réelle t par :

$$\varphi_{h,x}(t) = f(x + th).$$

1. (a) Montrer que $\varphi_{h,x}$ est une fonction convexe de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
(b) En déduire que $\varphi'_{h,x}(0) \leq \varphi_{h,x}(1) - \varphi_{h,x}(0)$.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a

$$\langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x).$$

3. On suppose dans cette question que $f(0) = 0$ et que $\nabla f(0) = 0$. On suppose également que f est strictement convexe, c'est-à-dire qu'elle vérifie pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tels que $x \neq y$, pour tout réel $\lambda \in]0, 1[$:

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) < (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(0) \leq f(x)$, puis que si $x \neq 0$, alors $f(x) > 0$.
