TD16

Projection orthogonale

Supplémentaire orthogonal

Exercice 16.1 (★)

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, déterminer une base de $F^\perp$ dans les deux cas suivants :

$$F = \text{Vect}((1,1,0,2),(0,1,3,2)). \qquad F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y-z+t=0 \text{ et } x-y-t=0\}.$$

Exercice 16.2 (★)

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on note $F = \text{Vect}((0,0,2),(1,-1,0))$.

1. Déterminer une base orthonormée $\mathscr{C} = (u_1,u_2,u_3)$ de E tel que (u_1,u_2) soit une base orthonormée de F et (u_3) une base orthonormée de $F^\perp$.
2. Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $P_{\mathscr{C},\mathscr{B}}$.

Exercice 16.3 (★★ - Vecteur normal à un hyperplan - ✍)

1. Soit F un hyperplan d'un espace euclidien E. Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que pour tout $x \in E$:
$$x \in F \ \Leftrightarrow\ \langle x,u\rangle = 0.$$
Un tel vecteur est dit *normal à l'hyperplan* F.
2. **Application.** Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique , on pose $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x+3y-z=0\}$. Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et déterminer un vecteur normal à F.

1. Supposons que F soit un hyperplan, c'est-à-dire que $\dim(F) = \dim(E)-1$. Dans ce cas, on a :
$$\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F) = \dim(E) - (\dim(E)-1) = 1.$$
Ainsi $F^\perp$ est une droite vectorielle, et il existe $u \in E$ tel que $F^\perp = \text{Vect}(u)$. On a alors :
$$x \in F \Leftrightarrow x \in (F^\perp)^\perp = (\text{Vect}(u))^\perp \Leftrightarrow \langle x,u\rangle = 0.$$
D'où le résultat.
2. On a :
$$(x,y,z) \in F \Leftrightarrow 2x+3y-z=0 \Leftrightarrow \langle (x,y,z),(2,3,-1)\rangle = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) \in \text{Vect}((2,3,-1))^\perp$$
Ainsi en posant $u = (2,3,-1)$, on a $F = \text{Vect}(u)^\perp$. On a $\dim(F) = 3 - \dim(\text{Vect}(u)) = 3-1 = 2$. Donc F est un hyperplan, et u est un vecteur normal de F.

Remarque. On notera que le vecteur normal s'obtient très facilement à partir de l'équation cartésienne d'un hyperplan. Si par exemple F est l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ d'équation :
$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0,$$
alors un vecteur normal à F est donné par $u = (a_1,\ldots,a_n)$.

Exercice 16.4 (★★ - Propriétés de l'orthogonal - ✍)
Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E.

1. Montrer l'implication suivante : $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$.
2. Montrer que :
$$F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp \quad ; \quad F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp.$$
3. En déduire que si E est de dimension finie et si F et G sont des sous-espaces supplémentaires de E, alors $E = F^\perp \oplus G^\perp$.

1. Supposons que $F \subset G$, et montrons que $G^\perp \subset F^\perp$. Soit pour cela $y \in G^\perp$, on a par définition que :
$$\forall x \in G, \quad \langle x, y\rangle = 0.$$
Comme $F \subset G$, on en déduit en particulier que :
$$\forall x \in F, \quad \langle x, y\rangle = 0.$$
Ainsi y appartient bien à $F^\perp$. D'où l'inclusion voulue.
2. Montrons que $F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$.
   - $\subset$ Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Montrons que $x \in (F+G)^\perp$. Pour tout $z \in F+G$, il existe $(y,t) \in F \times G$ tel que $z = y+t$. On obtient que :
   $$\langle x, z\rangle = \langle \underbrace{x}_{\in F^\perp}, \underbrace{y}_{\in F}\rangle + \langle \underbrace{x}_{\in G^\perp}, \underbrace{t}_{\in G}\rangle = 0+0 = 0.$$
   Donc x appartient bien à $(F+G)^\perp$.
   - $\supset$ On a $F \subset F+G$, donc d'après la première question, $(F+G)^\perp \subset F^\perp$. De même, on a $(F+G)^\perp \subset G^\perp$. Ainsi on obtient que $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.

   Montrons à présent que $F^\perp + G^\perp \subset (F\cap G)^\perp$. On a $F \cap G \subset G$, donc par la question 1, on obtient que $G^\perp \subset (F\cap G)^\perp$. De même, on a que $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Comme de plus, $(F\cap G)^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E, on peut conclure que $F^\perp + G^\perp \subset (F\cap G)^\perp$.
3. Supposons E de dimension finie, et que $E = F \oplus G$. Alors on a :
$$F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp = E^\perp = \{0_E\}.$$
Donc les sous-espaces $F^\perp$ et $G^\perp$ sont en somme directe. De plus on a :
$$\dim(F^\perp)+\dim(G^\perp) = \dim(E)-\dim(F)+\dim(E)-\dim(G) = 2\dim(E)-(\dim(F)+\dim(G)) = \dim(E).$$
Avec ces deux assertions, on a bien que $E = F^\perp \oplus G^\perp$.

Exercice 16.5 (★★ - Orthogonal d'un sous-espace en dimension infinie)
On munit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par :
$$\forall f,g \in E, \quad \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$
On considère l'espace $H = \{f \in E, f(0) = 0\}$.

a) Soit $f \in H^\perp$. On pose $g : t \mapsto tf(t)$. Que peut-on dire de f et g ? En déduire que $f = 0_E$.

b) En déduire $H^\perp$ et $(H^\perp)^\perp$. A-t-on $H \oplus H^\perp = E$?

1. On a $g \in H$, et donc $\langle f, g\rangle = 0$ puisque $f \in H^{\perp}$. On en déduit donc que :
$$\int_0^1 t f(t)^2 \,\mathrm{d}t = 0.$$
Il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue, positive. Elle est donc nulle si et seulement si la fonction est nulle. On en déduit donc que $tf(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$. D'où pour tout $t \in]0,1]$, on a $f(t) = 0$. Puisque de plus f est continue sur $[0,1]$, on en déduit que $f = 0$ sur $[0,1]$. Donc on a $f = 0_E$.

2. Par la question précédente, on en déduit que $H^{\perp} \subset \{0_E\}$, et donc égal à $\{0_E\}$ puisque c'est un sous-espace vectoriel de E. Mais alors on a :
$$(H^{\perp})^{\perp} = \{0_E\}^{\perp} = E$$
et
$$H \oplus H^{\perp} = H \oplus \{0_E\} = H \subsetneq E.$$
En particulier, on notera que H et $H^{\perp}$ ne sont pas nécessairement supplémentaires en dimension infinie. On a vu en cours que c'était cependant toujours le cas en dimension finie.

Exercice 16.6 (★★★ - QSP ESCP 2014)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$, et (a,b) une famille orthonormale de vecteurs de E. On définit $f \in \mathscr{L}(E)$ par :
$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle x, a\rangle b - \langle x, b\rangle a.$$

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)^{\perp}$.
2. Étudier la diagonalisabilité de f.

Projection orthogonale

Exercice 16.7 (★)

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère le sous-espace $F = \mathrm{Vect}((1,1,0),(-2,0,1))$. Déterminer le projeté de $a = (-2,1,1)$ sur F.

Exercice 16.8 (★ - Calcul de projetés orthogonaux)

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le projeté orthogonal de $P_1 = X^2 + X + 1$ sur $F_1 = \mathbb{R}_1[X]$.
2. Déterminer le projeté orthogonal de $P_2 = X^3 + X^2 + X + 1$ sur $F_2 = \mathrm{Vect}(X^3 + X, X^2, 1)$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $P_3 = X^2 - 1$ sur $F_3 = \mathrm{Vect}(1 + X, X^2 - X)$.

Réponses : $p_{F_1}(P_1) = 2X + \frac{5}{6}$, $p_{F_2}(P_2) = X^3 + X^2 + X + 1$, $p_{F_3}(P_3) = -\frac{20}{11}X^2 + \frac{32}{11}X - \frac{10}{11}$.

Exercice 16.9 (★)

Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on considère le produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$. Soit $p : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'application définie par $p(M) = \dfrac{M + {}^tM}{2}$.

1. Montrer que p est un projecteur de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et en déterminer l'image et le noyau.
2. Montrer que p est le projecteur orthogonal sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. En déduire une expression du projecteur orthogonal sur $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16.10 (★★)
Pour tout couple de polynômes (P, Q) de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0).$$

On note $F = \mathrm{Vect}(1+X, -1+X+X^2)$ et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On considère φ la projection orthogonale sur F.

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot,\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base orthonormée de F.
3. Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$. En déduire la matrice de φ dans la base canonique.

Exercice 16.11 (★★)
Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on considère F le sous-espace vectoriel défini par :

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y - z = 0\}.$$

On détermine la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale p sur F par deux méthodes.

1. **Méthode 1.**
   (a) Déterminer une base orthonormale de F.
   (b) Déterminer $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(p)$.
2. **Méthode 2.**
   (a) Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$.
   (b) On note q la projection orthogonale sur $F^\perp$. Déterminer $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(q)$.
   (c) En déduire $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(p)$.

Exercice 16.12 (★★)
Soit E un espace euclidien de base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$, soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension 1, et soit p le projecteur orthogonal sur F. Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = 1$.

> Puisque F est une droite vectorielle, prenons u un vecteur directeur unitaire de F de sorte que $F = \mathrm{Vect}(u)$ et que (u) est une base orthonormée de F. Ainsi on a :
>
> $$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad p(e_i) = \langle u, e_i\rangle u.$$
>
> De plus $(e_1, \ldots, e_n)$ étant une base orthonormée de E, on a $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\langle u, e_i\rangle e_i$ et $\|u\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\langle u, e_i\rangle^2$. On obtient donc :
>
> $$\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(\langle u, e_i\rangle)^2 = \|u\|^2 = 1$$

Exercice 16.13 (★★★★ - Oral ESCP 2016)
Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire, et $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

1. (a) Soit x un vecteur appartenant à $\operatorname{Ker}(u-\mathrm{id}) \cap \operatorname{Im}(u-\mathrm{id})$. Justifier qu'il existe $y \in E$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $nx = u^n(y) - y$.
   (b) En déduire que $E = \operatorname{Ker}(u - id) \oplus \operatorname{Im}(u - \mathrm{id})$.
2. On pose : $\forall p \in \mathbb{N}$, $v_p = \dfrac{1}{p+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{p} u^k$, et on note w le projecteur sur $\operatorname{Ker}(u-\mathrm{id})$ parallèlement à $\operatorname{Im}(u-\mathrm{id})$.
   Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $(v_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $w(x)$, c'est à dire que :
   $$\forall x \in E, \quad \lim_{p\to+\infty} \|v_p(x) - w(x)\| = 0.$$
3. Soit Q un projecteur de E, distinct de l'application nulle.
   (a) Montrer que si $\operatorname{Ker}(Q)$ et $\operatorname{Im}(Q)$ sont orthogonaux, alors : $\forall x \in E$, $\|Q(x)\| \leq \|x\|$.
   (b) Réciproquement, on suppose que : $\forall x \in E$, $\|Q(x)\| \leq \|x\|$. Soit $x \in \operatorname{Im}(Q)$ et $y \in \operatorname{Ker}(Q)$. En considérant les vecteurs $z = x + \lambda y$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que : $\langle x, y\rangle = 0$.
   (c) En déduire que le projecteur Q non nul est orthogonal si et seulement si $\forall x \in E$, $\|Q(x)\| \leq \|x\|$.
4. En déduire que w est un projecteur orthogonal.

1. (a) Soit donc $x \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}) \cap \operatorname{Im}(u - \mathrm{id})$. Puisque $x \in \operatorname{Im}(u - \mathrm{id})$, il existe $y \in E$ tel que $x = (u - \mathrm{id})(y) = u(y) - y$. Composons par u cette relation, en notant que $u(x) = x$ puisque $x \in \operatorname{Ker}(u)$:
   $$x = u(x) = u^2(y) - u(y)$$
   D'où en recomposant par u, on obtient en itérant :
   $$x = u^k(y) - u^{k-1}(y) \quad \text{pour tout } k = 1, \ldots, n.$$
   Sommons ces n égalités, on obtient :
   $$nx = (u(y) - y) + (u^2(y) - u(y)) + \cdots + (u^n(y) - u^{n-1}(y)) = u^n(y) - y.$$
   D'où le résultat.
   (b) On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$n\|x\| = \|u^n(y) - y\| \leq \|u^n(y)\| + \|y\|$$
   par l'inégalité triangulaire. Or par hypothèse on a $\|u(y)\| \leq \|y\|$. Par récurrence (que je vous laisse rédiger), on montre que $\|u^n(y)\| \leq \|y\|$. On obtient donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$n\|x\| \leq 2\|y\|.$$
   Si $x \neq 0_E$, on aurait alors $n \leq \dfrac{2\|y\|}{\|x\|}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est impossible. Donc $x = 0_E$ et on a donc $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}) \cap \operatorname{Im}(u - \mathrm{id}) = \{0_E\}$. Comme de plus $\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id})) + \dim(\operatorname{Im}(u - \mathrm{id}))$ par le théorème du rang, on a donc que :
   $$E = \operatorname{Ker}(u - id) \oplus \operatorname{Im}(u - \mathrm{id}).$$
2. Soit $x \in E$. D'après 1.(b), il existe un unique couple $(y, z) \in \operatorname{Ker}(u - id) \times \operatorname{Im}(u - \mathrm{id})$ tel que :
   $$x = y + z$$

Pour $y \in \text{Ker}(u - \text{id})$, on a par récurrence immédiate que $u^k(y) = y$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc :

$$v_p(y) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} u^k(y) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} y = y.$$

Pour $z \in \text{Im}(u - \text{id})$, il existe $t \in E$ tel que $z = u(t) - t$. On a donc pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$v_p(z) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} u^k(z) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} u^{k+1}(t) - u^k(t) = \frac{1}{p+1}(u^p(t) - t)$$

par télescopage. On en déduit par inégalité triangulaire que :

$$\|v_p(z)\| \leq \frac{1}{p+1}(\|u^p(t)\| + \|t\|) \leq \frac{2\|t\|}{p+1}$$

par inégalité triangulaire et en utilisant que $\|u^p(t)\| \leq \|t\|$ comme nous l'avions démontré à la première question. Puisque $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{2\|t\|}{p+1} = 0$, on en déduit par théorème des gendarmes que $\lim\limits_{p\to+\infty} \|v_p(z)\| = 0$.

Finalement, on obtient donc :

$$v_p(x) - w(x) = v_p(y) + v_p(z) - y = y + v_p(z) - y = v_p(z)$$

D'où $\|v_p(x) - w(x)\| = \|v_p(z)\| \to 0$ lorsque $p \to +\infty$ d'après ce qui précède. D'où le résultat.

3. (a) Supposons $\text{Ker}(Q)$ et $\text{Im}(Q)$ orthogonaux. Alors pour tout $x \in E$, $Q(x) - x \in \text{Ker}(Q)$ et $Q(x) \in \text{Im}(Q)$ sont orthogonaux, et on a par le théorème de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|Q(x) + (x - Q(x))\|^2 = \|Q(x)\|^2 + \|x - Q(x)\|^2 \geq \|Q(x)\|^2.$$

D'où en prenant la racine carrée, on obtient $\|Q(x)\| \leq \|x\|$.

(b) Supposons que $\forall x \in E$, $\|Q(x)\| \leq \|x\|$. Soit $x \in \text{Im}(Q)$ et $y \in \text{Ker}(Q)$ comme dans l'énoncé. Considérons le vecteur $z = x + \lambda y$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\|Q(z)\|^2 \leq \|z\|^2 &\Rightarrow \|Q(x)\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \\
&\Rightarrow \|x\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \\
&\Rightarrow 0 \leq \lambda(2\langle x, y\rangle + \lambda\|y\|^2)
\end{aligned}$$

Ainsi on a $\lambda(2\langle x, y\rangle + \lambda\|y\|^2) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\|y\| \neq 0$ (ce qu'on peut supposer sinon on a immédiatement $\langle x, y\rangle = 0$), on a donc un polynôme du second degré ayant deux racines $\lambda = 0$ et $\lambda = -2\frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$. Il est de signe constant si et seulement si ses racines sont confondues, soit si et seulement si $\langle x, y\rangle = 0$. D'où le résultat.

(c) On a déjà obtenu l'implication $\Rightarrow$ en 3.(a). Pour la réciproque, on a vu que si $\|Q(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$, alors $\text{Ker}(Q)$ et $\text{Im}(Q)$ sont orthogonaux : $\text{Ker}(Q) \subset \text{Im}(Q)^\perp$. Comme de plus on a par le théorème du rang que $\dim \text{Ker}(Q) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(Q)) = \dim(\text{Im}(Q)^\perp)$, on a donc $\text{Ker}(Q) = \text{Im}(Q)^\perp$ et Q est bien un projecteur orthogonal.

4. On a par inégalité triangulaire que pour tout $x \in E$:

$$\|w(x)\| = \|w(x) - v_p(x) + v_p(x)\| \leq \|w(x) - v_p(x)\| + \|v_p(x)\|$$

Or, toujours par inégalité triangulaire, on a :

$$\|v_p(x)\| \leq \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} \|u^k(x)\| \leq \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} \|(x)\| = \|x\|.$$

Puisque $\lim_{p\to+\infty} \|w(x) - v_p(x)\| = 0$, on en déduit par passage à la limite dans les inégalités que :

$$\|w(x)\| \leq \|x\|.$$

Par la question précédente, on a donc bien que w est un projecteur orthogonal.

Distance à un sous-espace

Exercice 16.14 (★)
Pour tous réels x et y, on note :

$$f(x,y) = (2+x+2y)^2 + (1-2x)^2 + (1+2y)^2 + (3+2x-y)^2.$$

On se place $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. On note $a = (-2,1,1,3)$ et $F = \text{Vect}(u_1,u_2)$ avec $u_1 = (1,2,0,-2)$ et $u_2 = (2,0,-2,1)$.

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x,y) = \|a - (xu_1 + yu_2)\|^2$.
2. En déduire que la fonction f admet un minimum atteint en un unique couple (x_0,y_0) que l'on déterminera, et préciser la valeur de ce minimum.

Exercice 16.15 (★★)
Déterminer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = (-x+2)^2 + (3x-y+1)^2 + (x+y)^2$ soit minimal.
Quelle est la valeur minimale de cette fonction ?

La somme de 3 carrés nous indique que l'espace euclidien à considérer est $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. On a :

$$f(x,y) = \|(2-x, 1+3x-y, x+y)\|^2 = \|(2,1,0) - x(1,-3,-1) - y(0,1,-1)\|^2.$$

On cherche ainsi la distance du vecteur $u = (2,1,0)$ au sous-espace $F = Vect(v_1,v_2)$ avec $v_1 = (1,-3,-1)$ et $v_2 = (0,1,-1)$. Calculons donc le projeté orthogonal $p(u)$ de u sur F. On ne dispose pas d'une base orthonormée de F. On va appliquer la méthode du cours : $p(u) \in F$ donc il existe $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $p(u) = av_1 + bv_2$. D'autre part, $u - p(u) \in F^\perp$ donc on a :

$$\begin{cases} \langle u - p(u), v_1\rangle = 0 \\ \langle u - p(u), v_2\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle p(u), v_1\rangle = \langle u, v_1\rangle \\ \langle p(u), v_2\rangle = \langle u, v_2\rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\langle v_1, v_1\rangle + b\langle v_2, v_1\rangle = \langle u, v_1\rangle \\ a\langle v_1, v_2\rangle + b\langle v_2, v_2\rangle = \langle u, v_2\rangle \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11a - 2b = -1 \\ -2a + 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1/2 \end{cases}$$

On peut donc conclure par le cours que f admet un minimum global, atteint en un unique point $(a,b) = (0,1/2)$. De plus, ce minimum vaut $f(0,1/2) = 4 + 1/4 + 1/4 = \frac{9}{2}$.

Exercice 16.16 (★★)
Si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$ sont deux polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$, on pose

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{2} a_ib_i.$$

On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ et en déterminer une base.
2. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Déterminer la distance entre le polynôme X^2 et F.

Exercice 16.17 (★★)
Soit $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$. On pose, pour tous $P, Q \in E$,

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=-n}^{n} P(k)Q(k).$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que si P est pair et Q impair, alors P et Q sont orthogonaux.
3. Déterminer, en fonction de n, les valeurs de a et b qui rendent minimale l'expression $\|X^2 - aX - b\|^2$.

Exercice 16.18 (★★)
Le but de cet exercice est de prouver l'existence et de calculer la valeur de

$$\Delta = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^t - a - bt)^2 \, \mathrm{d}t.$$

Sur $E = \mathscr{C}([0,1])$, on définit un produit scalaire en posant pour tout $(f, g) \in E^2$, $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t) \, \mathrm{d}t$.
Soient f_1, f_2 et g les éléments de E définis par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f_1(t) = 1,\ f_2(t) = t$ et $g(t) = e^t$. On pose $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$. Soit $Q = af_1 + bf_2 \in F$.

1. Donner sous forme intégrale $\|g - Q\|^2$.
2. En déduire qu'il existe un unique $Q_0 \in F$ minimisant $\|g - Q_0\|^2$.
3. Déterminer sans calcul les valeurs de $\langle g - Q_0, f_1 \rangle$ et de $\langle g - Q_0, f_2 \rangle$.
4. En déduire la valeur de Δ.

Exercice 16.19 (★★★)
On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel. Soit $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(M) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.
2. Déterminer $F^{\perp}$.
3. Soit J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Déterminer la distance entre la matrice J et le sous-espace F.
