TD16

Projection orthogonale

Supplémentaire orthogonal

Exercice 16.1 (★)

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, déterminer une base de $F^\perp$ dans les deux cas suivants :

$$F = \mathrm{Vect}((1,1,0,2),(0,1,3,2)). \qquad F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y-z+t = 0 \text{ et } x-y-t = 0\}.$$

Exercice 16.2 (★)

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on note $F = \mathrm{Vect}((0,0,2),(1,-1,0))$.

1. Déterminer une base orthonormée $\mathscr{C} = (u_1,u_2,u_3)$ de E tel que (u_1,u_2) soit une base orthonormée de F et (u_3) une base orthonormée de $F^\perp$.
2. Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $P_{\mathscr{C},\mathscr{B}}$.

Exercice 16.3 (★★ - Vecteur normal à un hyperplan - ✍)

1. Soit F un hyperplan d'un espace euclidien E. Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que pour tout $x \in E$:
$$x \in F \ \Leftrightarrow\ \langle x,u\rangle = 0.$$
Un tel vecteur est dit *normal à l'hyperplan* F.
2. **Application.** Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique , on pose $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x+3y-z = 0\}$. Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et déterminer un vecteur normal à F.

Exercice 16.4 (★★ - Propriétés de l'orthogonal - ✍)

Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E.

1. Montrer l'implication suivante : $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$.
2. Montrer que :
$$F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp \quad ; \quad F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp.$$
3. En déduire que si E est de dimension finie et si F et G sont des sous-espaces supplémentaires de E, alors $E = F^\perp \oplus G^\perp$.

Exercice 16.5 (★★ - Orthogonal d'un sous-espace en dimension infinie)

On munit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par :

$$\forall f,g \in E, \quad \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

On considère l'espace $H = \{f \in E, f(0) = 0\}$.

a) Soit $f \in H^\perp$. On pose $g : t \mapsto tf(t)$. Que peut-on dire de f et g ? En déduire que $f = 0_E$.

b) En déduire $H^\perp$ et $(H^\perp)^\perp$. A-t-on $H \oplus H^\perp = E$?

Exercice 16.6 (★★★ - QSP ESCP 2014)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$, et (a,b) une famille orthonormale de vecteurs de E. On définit $f \in \mathscr{L}(E)$ par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle x,a\rangle b - \langle x,b\rangle a.$$

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)^\perp$.
2. Étudier la diagonalisabilité de f.

Projection orthogonale

Exercice 16.7 (★)

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère le sous-espace $F = \mathrm{Vect}((1,1,0),(-2,0,1))$. Déterminer le projeté de $a = (-2,1,1)$ sur F.

Exercice 16.8 (★ - Calcul de projetés orthogonaux)

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le projeté orthogonal de $P_1 = X^2 + X + 1$ sur $F_1 = \mathbb{R}_1[X]$.
2. Déterminer le projeté orthogonal de $P_2 = X^3 + X^2 + X + 1$ sur $F_2 = \mathrm{Vect}(X^3 + X, X^2, 1)$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $P_3 = X^2 - 1$ sur $F_3 = \mathrm{Vect}(1 + X, X^2 - X)$.

Réponses : $p_{F_1}(P_1) = 2X + \frac{5}{6}$, $p_{F_2}(P_2) = X^3 + X^2 + X + 1$, $p_{F_3}(P_3) = -\frac{20}{11}X^2 + \frac{32}{11}X - \frac{10}{11}$.

Exercice 16.9 (★)

Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on considère le produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$. Soit $p : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'application définie par $p(M) = \dfrac{M + {}^tM}{2}$.

1. Montrer que p est un projecteur de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et en déterminer l'image et le noyau.
2. Montrer que p est le projecteur orthogonal sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. En déduire une expression du projecteur orthogonal sur $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16.10 (★★)

Pour tout couple de polynômes (P, Q) de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0).$$

On note $F = \mathrm{Vect}(1 + X, -1 + X + X^2)$ et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On considère φ la projection orthogonale sur F.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base orthonormée de F.
3. Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$. En déduire la matrice de φ dans la base canonique.

Exercice 16.11 (★★)

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on considère F le sous-espace vectoriel défini par :

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y - z = 0\}.$$

On détermine la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale p sur F par deux méthodes.

1. **Méthode 1.**
   (a) Déterminer une base orthonormale de F.
   (b) Déterminer $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(p)$.
2. **Méthode 2.**
   (a) Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$.
   (b) On note q la projection orthogonale sur $F^\perp$. Déterminer $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(q)$.
   (c) En déduire $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(p)$.

Exercice 16.12 (★★)
Soit E un espace euclidien de base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$, soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension 1, et soit p le projecteur orthogonal sur F. Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = 1$.

Exercice 16.13 (★★★★ - Oral ESCP 2016)
Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien muni de la norme $\| \cdot \|$ associée au produit scalaire, et $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

1. (a) Soit x un vecteur appartenant à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$. Justifier qu'il existe $y \in E$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $nx = u^n(y) - y$.
   (b) En déduire que $E = \mathrm{Ker}(u - id) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$.
2. On pose : $\forall p \in \mathbb{N}$, $v_p = \dfrac{1}{p+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} u^k$, et on note w le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$.
   Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $(v_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $w(x)$, c'est à dire que :
   $$\forall x \in E, \quad \lim_{p \to +\infty} \|v_p(x) - w(x)\| = 0.$$
3. Soit Q un projecteur de E, distinct de l'application nulle.
   (a) Montrer que si $\mathrm{Ker}(Q)$ et $\mathrm{Im}(Q)$ sont orthogonaux, alors : $\forall x \in E$, $\|Q(x)\| \leq \|x\|$.
   (b) Réciproquement, on suppose que : $\forall x \in E$, $\|Q(x)\| \leq \|x\|$. Soit $x \in \mathrm{Im}(Q)$ et $y \in \mathrm{Ker}(Q)$. En considérant les vecteurs $z = x + \lambda y$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que : $\langle x, y \rangle = 0$.
   (c) En déduire que le projecteur Q non nul est orthogonal si et seulement si $\forall x \in E$, $\|Q(x)\| \leq \|x\|$.
4. En déduire que w est un projecteur orthogonal.

Distance à un sous-espace

Exercice 16.14 (★)
Pour tous réels x et y, on note :

$$f(x, y) = (2 + x + 2y)^2 + (1 - 2x)^2 + (1 + 2y)^2 + (3 + 2x - y)^2.$$

On se place $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. On note $a = (-2, 1, 1, 3)$ et $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1, 2, 0, -2)$ et $u_2 = (2, 0, -2, 1)$.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = \|a - (xu_1 + yu_2)\|^2$.
2. En déduire que la fonction f admet un minimum atteint en un unique couple (x_0, y_0) que l'on déterminera, et préciser la valeur de ce minimum.

Exercice 16.15 (★★)
Déterminer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (-x + 2)^2 + (3x - y + 1)^2 + (x + y)^2$ soit minimal.
Quelle est la valeur minimale de cette fonction ?

Exercice 16.16 (★★)
Si $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ et $Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$ sont deux polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^{2} a_i b_i.$$

On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ et en déterminer une base.
2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la distance entre le polynôme X^2 et F.

Exercice 16.17 (★★)
Soit $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$. On pose, pour tous $P, Q \in E$,

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=-n}^{n} P(k)Q(k).$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que si P est pair et Q impair, alors P et Q sont orthogonaux.
3. Déterminer, en fonction de n, les valeurs de a et b qui rendent minimale l'expression $\|X^2 - aX - b\|^2$.

Exercice 16.18 (★★)
Le but de cet exercice est de prouver l'existence et de calculer la valeur de

$$\Delta = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^t - a - bt)^2 \,\mathrm{d}t.$$

Sur $E = \mathscr{C}([0,1])$, on définit un produit scalaire en posant pour tout $(f,g) \in E^2$, $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
Soient f_1, f_2 et g les éléments de E définis par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$ et $g(t) = e^t$. On pose $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$. Soit $Q = af_1 + bf_2 \in F$.

1. Donner sous forme intégrale $\|g - Q\|^2$.
2. En déduire qu'il existe un unique $Q_0 \in F$ minimisant $\|g - Q_0\|^2$.
3. Déterminer sans calcul les valeurs de $\langle g - Q_0, f_1 \rangle$ et de $\langle g - Q_0, f_2 \rangle$.
4. En déduire la valeur de Δ.

Exercice 16.19 (★★★)
On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel. Soit $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(M) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.
2. Déterminer $F^\perp$.
3. Soit J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Déterminer la distance entre la matrice J et le sous-espace F.
