

Convergence de variables aléatoires

Inégalités de concentration

Exercice 17.1 (★★)

En appliquant l'inégalité de Markov à $|X|$, où X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, montrer que pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{x}.$$

Exercice 17.2 (★★)

On note Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Montrer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 - \Phi(x) \leq \frac{1}{2x^2}$.
2. En déduire que $\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))dt$ converge et calculer sa valeur à l'aide d'une intégration par parties.

Convergence en probabilité

Exercice 17.3 (★)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, et qui suivent toutes la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Étudier la convergence en probabilité de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 17.4 (★)

Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire, toutes définies sur le même espace probabilisé. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\})$, et que X admet un moment d'ordre 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = \varepsilon_n X$. Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X .

Exercice 17.5 (★★)

1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs positives ayant toutes une espérance et une variance. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = m$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(X_n) = 0$.

En appliquant l'inégalité de Markov à $(X_n - m)^2$, montrer que $X_n \xrightarrow{P} m$.

2. Soit $(Y_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant toutes une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 1$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $X_n = \prod_{k=1}^n Y_k$. À l'aide de l'inégalité de Markov, montrer la convergence en probabilité de la suite (X_n) vers la variable aléatoire certaine égale à 0.

Exercice 17.6 (★★)

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$.

1. Soit $n < n'$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur n et n' pour que Y_n et $Y_{n'}$ soient indépendantes.
2. Montrer que la suite \bar{Y}_n converge en probabilité vers la variable certaine égale à $2p$.

Exercice 17.7 (★★★★ - 📝)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires et X et Y deux variables aléatoires, toutes définies sur un même espace probabilisé. On suppose que $X_n \xrightarrow{P} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} Y$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $[|X_n + Y_n - (X + Y)| \geq \varepsilon] \subset [|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}] \cup [|Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}]$.
2. Montrer que $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$.
3. On suppose de plus que toutes les variables aléatoires considérées sont à valeurs strictement positives. Montrer que $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{P} X \cdot Y$.

Exercice 17.8 (★★★★ - QSP HEC 2016)

Soit X_1, \dots, X_n des variables i.i.d. selon la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$Y_n = \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n}.$$

1. Expliquer pourquoi la figure ci-dessous, obtenue à partir du code **Scilab** suivant, suggère la convergence en probabilité de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

```

1 x = linspace(0.2,0.8,20);
2 n = [50 200 800];
3 for i = 1:3
4     N = 1000;
5     LY = sum(log(rand(N,n(i))), "c")
6     ;// sommation des colonnes
7     C = exp(LY/n(i));
8     subplot(1,3,i); // place trois
9     histplot(x,C);
10 end

```

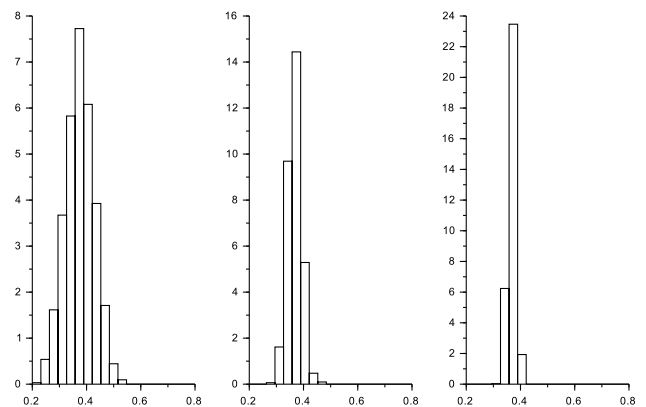


FIGURE 1 - *Histogrammes.*

2. Justifier la convergence en probabilité de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Convergence en loi

Exercice 17.9 (★)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes telles que $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Étudier la convergence en loi de la suite (X_n) .

Exercice 17.10 (★★)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on précisera la loi. Montrer qu'il s'agit également d'une convergence en probabilité.

Exercice 17.11 (★★)

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n ($n \geq 2$). On tire avec remise une boule de l'urne jusqu'à obtenir un numéro supérieur ou égal au premier numéro tiré. Soit X_n la variable égale au nombre de tirages effectués.

1. Montrer que pour tout $(n, k) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^2$, on a $P(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\binom{j}{n}^{k-2} - \binom{j}{n}^{k-1} \right)$.
 2. À l'aide des sommes de Riemann, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.
 3. En déduire que $(X_n)_{n \geq 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.
-

Exercice 17.12 (★★★ - QSP HEC 2017)

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et soit $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels de $]0, 1[$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_i suit une loi géométrique de paramètre p_i . On pose pour tout $i \in \mathbb{N}^*$: $q_i = 1 - p_i$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

1. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $P(Z_n \geq k)$. Quelle est la loi de Z_n ?
2. On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a $p_i = \frac{1}{(i+1)^2}$.

Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 17.13 (★)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telles que $X_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de X_n .
 2. Étudier la convergence en loi de la suite (X_n) .
 3. Étudier la convergence en probabilité de la suite (X_n) .
-

Exercice 17.14 (★★)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\forall t \in \mathbb{R}, f_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1 + n^2 t^2}$.

1. Montrer que f_n est une densité de probabilité.

2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telles que X_n admet f_n pour densité.
 - (a) Déterminer la fonction de répartition de X_n .
 - (b) Montrer que (X_n) converge en loi vers la variable certaine égale à 0.
 - (c) Montrer qu'il s'agit également d'une convergence en probabilité.
-

Exercice 17.15 (★★)

Soient (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose pour tout $n \geq 1$, $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_n de Y_n .
 2. Montrer que (Y_n) converge en probabilité vers la variable constante égale à 0.
 3. Montrer que la suite (nY_n) converge en loi vers une variable suivant une loi exponentielle.
-

Exercice 17.16 (★★)

Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
 2. Soit à présent $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de densité f .
 - (a) Déterminer la fonction de répartition des X_i .
 - (b) En déduire la fonction de répartition de $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.
 - (c) Étudier la convergence en loi de la suite $(M_n - \ln(n))_{n \in \mathbb{N}}$.
-

Exercice 17.17 (★★★)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes telles que $n \times X_n$ suit une loi uniforme sur $[[0, n]]$.

1. À l'aide du logiciel **Scilab**, tracer la fonction de répartition de X_n pour $n = 4, 10, 30$. On rappelle pour cela que si \mathbf{x} et \mathbf{y} sont des vecteurs de même dimension, alors `plot2d2(x, y)` effectue un tracé en escalier d'abscisse \mathbf{x} et d'ordonnée \mathbf{y} . Que peut-on conjecturer ?
 2. Étudier la convergence en loi de (X_n) .
-

Exercice 17.18 (★★)

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre 1, et on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Exprimer $P(S_n \leq n)$ sous forme d'une somme.

2. En utilisant le théorème central limite, montrer que : $\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$.
-

Exercice 17.19 (★★ - Une application de Slutsky)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On pose :

$$Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{n}{X_1 + \dots + X_n}.$$

Montrer que (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale que l'on précisera.

Exercice 17.20 (★★★★ - Convergence en probabilité et convergence en loi (Oral HEC) - 📝)

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ et X des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) telles que $X_n \xrightarrow{P} X$. On note F_n la fonction de répartition de X_n et F la fonction de répartition de X . Soit x un point de continuité de F , et soit $\delta > 0$ fixé.

1. Montrer qu'on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $F(x - \varepsilon) > F(x) - \delta$ et $F(x + \varepsilon) < F(x) + \delta$.
2. Montrer que :

$$[X_n \leq x] \subset [X \leq x + \varepsilon] \cup [|X_n - X| > \varepsilon].$$

Montrer de même que :

$$[X \leq x - \varepsilon] \subset [X_n \leq x] \cup [|X_n - X| > \varepsilon].$$

3. En déduire que :

$$F_n(x) \leq F(x) + \delta + P(|X_n - X| > \varepsilon) \quad \text{et} \quad F(x) - \delta \leq F_n(x) + P(|X_n - X| > \varepsilon).$$

4. Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Approximation**Exercice 17.21 (★)**

Soit S une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(45; 0.7)$. Donner une approximation de la probabilité $P(28 < S \leq 39)$ sans correction de continuité puis avec correction de continuité.

Un calcul détaillé à l'aide de loi binomiale donne $P(28 < S \leq 39) \approx 0,8332$.

Exercice 17.22 (★)

On effectue des lancers successifs d'un dé équilibré. On cherche à déterminer le nombre n de lancers nécessaires pour garantir avec moins de 5% d'erreur que la fréquence d'apparition du 1 sera $\frac{1}{6} \pm 0.01$.

1. **Méthode 1.** À l'aide de l'inégalité de Bienaymé Tchebychev.

(a) Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. Prouver que :

$$\forall a > 0, \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}.$$

(b) En déduire le nombre n de lancers nécessaires.

2. **Méthode 2.** À l'aide du théorème central limite, déterminer approximativement ce nombre n .
3. Un calcul détaillé à l'aide de la loi binomiale prouve qu'il faut $n \geq 5395$. Que dire des résultats obtenus précédemment ?

Exercice 17.23 (★★)

Dans le désert, une Renault 4L crève en moyenne tous les 4000 km. On considère donc qu'à chaque kilomètre, la probabilité de crever est de $\frac{1}{4000}$. Un équipage s'inscrit au 4L Trophy, rallye de 6000 km dans le désert. Il aimerait savoir combien de roues de secours emporter pour avoir moins de 10% de chances de manquer de roues de secours. Deux roues de secours sont-elles suffisantes ? Trois ? On donne $e^{-3/2} \approx 0.22$.

Exercice 17.24 (★★)

Une entreprise compte 300 employés. Chacun d'eux téléphone en moyenne 6 minutes par heure. Combien de lignes téléphonique doit faire installer l'entreprise afin que la probabilité que toutes les lignes soient occupées en même temps soit inférieure ou égale à 0.025 ?

Exercice 17.25 (★★★★ - QSP HEC 2018)

On considère la fonction Scilab suivante :

```

1 function f = bn(N,n,p)
2 X = grand(N,n,'geom',p);
3 k=0;
4 for i = 1:N
5     Y = sum(X(i,:))
6     if Y>=n/p then k=k+1;
7     end
8 end
9 f = k/N
10 endfunction

```

1. De quel nombre réel $\text{bn}(N,1,0.4)$ fournit-il une valeur approchée lorsque N est grand ?
 2. Donner une valeur approximative de $\text{bn}(10000,10000,0.4)$.
-