

Endomorphismes symétriques

Endomorphismes symétriques

Exercice 18.1 (★)

On munit l'espace \mathbb{R}^3 du produit scalaire canonique et on considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 défini, pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ de \mathbb{R}^3 par :

$$f(x) = (3x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 3x_3).$$

Montrer que l'endomorphisme f est symétrique.

Exercice 18.2 (★)

Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f dont la matrice relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 est $A =$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est la projection orthogonale sur un sous-espace de \mathbb{R}^3 que l'on déterminera.

Exercice 18.3 (★★ - Structure des endomorphismes symétriques - 📌)

On note \mathcal{S} l'ensemble des endomorphismes symétriques de E .

1. Montrer que \mathcal{S} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Soit (f, g) un couple d'éléments de \mathcal{S} .
Montrer que $f \circ g \in \mathcal{S}$ si et seulement si f et g commutent.
3. Soit $f \in \mathcal{S}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \in \mathcal{S}$ puis que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(f) \in \mathcal{S}$.

1. On a bien que l'endomorphisme nulle $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ est symétrique puisque pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\langle f(x), y \rangle = \langle 0_E, y \rangle = 0$$

et

$$\langle x, f(y) \rangle = \langle x, 0_E \rangle = 0.$$

Soit à présent $f, g \in \mathcal{S}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On sait déjà que $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E)$ car $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel. Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \langle (\lambda f + \mu g)(x), y \rangle &= \langle \lambda f(x) + \mu g(x), y \rangle \\ &= \lambda \langle f(x), y \rangle + \mu \langle g(x), y \rangle \text{ par bil. du prod. scal.} \\ &= \lambda \langle x, f(y) \rangle + \mu \langle x, g(y) \rangle \text{ car } f \text{ et } g \text{ sont sym.} \\ &= \langle x, \lambda f(y) + \mu g(y) \rangle \text{ par bil. du prod. scal.} \\ &= \langle x, (\lambda f + \mu g)(y) \rangle \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda f + \mu g$ appartient bien à \mathcal{S} . Donc \mathcal{S} est un sous-espace vectoriel de E .

2. Soit $f, g \in \mathcal{S}$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
 f \circ g \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \langle f \circ g(x), y \rangle = \langle x, f \circ g(y) \rangle \\
 &\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \langle f(g(x)), y \rangle = \langle x, f \circ g(y) \rangle \\
 &\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \langle g(x), f(y) \rangle = \langle x, f \circ g(y) \rangle \text{ car } f \text{ sym.} \\
 &\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \langle x, g \circ f(y) \rangle = \langle x, f \circ g(y) \rangle \text{ car } g \text{ sym.} \\
 &\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \langle x, g \circ f(y) - f \circ g(y) \rangle = 0 \\
 &\Leftrightarrow \forall y \in E, g \circ f(y) - f \circ g(y) \in E^\perp = \{0_E\} \\
 &\Leftrightarrow \forall y \in E, g \circ f(y) = f \circ g(y)
 \end{aligned}$$

Ainsi $f \circ g \in \mathcal{S}$ si et seulement si f et g commutent.

3. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \in \mathcal{S}$.

Init. $f^0 = Id_E$ qui est bien un endomorphisme symétrique. D'où le résultat à $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f^n \in \mathcal{S}$. Puisque f et f^n commutent, on a par la question précédente que $f \circ f^n = f^{n+1} \in \mathcal{S}$. D'où la propriété au rang $n + 1$.

On conclut par principe de récurrence.

Puisque $f^n \in \mathcal{S}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et puisque \mathcal{S} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, on en déduit que toute combinaison linéaire de puissances de f appartient encore à \mathcal{S} . Ainsi pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a bien $P(f) \in \mathcal{S}$.

Remarque. On aurait pu montrer de tels résultats pour l'ensemble des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et le déduire pour les endomorphismes symétriques à l'aide de l'application :

$$\Phi_{\mathcal{B}} : f \in \mathcal{L}(E) \mapsto M_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

où \mathcal{B} est une **base orthonormée** de E . Rappelons que $\Phi_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et est compatible avec la composée d'applications et le produit matriciel.

Exercice 18.4 (★★)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est symétrique. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E .

Soit $x \in \text{Ker}(f)$ et $y \in \text{Im}(f)$. Il existe donc $z \in E$ tel que $y = f(z)$. On a :

$$\langle x, y \rangle = \langle x, f(z) \rangle \underset{f \text{ sym.}}{=} \langle f(x), z \rangle \underset{x \in \text{Ker}(f)}{=} \langle 0_E, z \rangle = 0.$$

Ainsi on a $\text{Ker}(f) \perp \text{Im}(f)$. En particulier ses sous-espaces sont en somme directe (propriété du cours). Comme de plus par le théorème du rang on a :

$$\dim(E) = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f),$$

on peut donc conclure que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E .

Réduction des endomorphismes symétriques

Exercice 18.5 (★) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer le rang de $A - I_3$. En déduire que 1 est valeur propre de A et déterminer $\dim(E_1(A))$. En déduire les autres valeurs propres de A .
3. Déterminer une base des sous-espaces propres de A .
4. Déterminer une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = PD^tP$.

Exercice 18.6 (★)

Pour chacune des matrices symétriques suivantes, déterminer D diagonale et P orthogonale telles que $A = PD^tP$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18.7 (★★)

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $E = \mathbb{R}_3[X]$ en posant :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt.$$

2. On définit $f : P \in E \mapsto 2XP' + (X^2 - 1)P''$. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
3. Montrer que : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X], \langle f(P), Q \rangle = - \int_{-1}^1 P'(t)Q'(t)(t^2 - 1)dt$.
En déduire que f est symétrique. f est-il diagonalisable ?
4. Déterminer le spectre de f . f est-il un automorphisme ?
5. Déterminer une base orthonormée de vecteurs propres de f .

Exercice 18.8 (★★ - D'après EM Lyon 2013)

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\|X\| = 1$, et soit $S = X^tX$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle M, N \rangle = \text{Tr}(^tMN)$.

1. Montrer que S est symétrique et vérifie $S^2 = S$.
2. Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\Phi(M) = SM$. Vérifier que Φ est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\Phi^2 = \Phi$. Que dire des valeurs propres de Φ ?
4. Montrer que $\text{Ker}(\Phi)$ et $\text{Ker}(\Phi - \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 18.9 (★★)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$. Montrer que $A^2 = I_n$.

Exercice 18.10 (★★)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A . Montrer que :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \dim(E_{\lambda_i}(A)).$$

Commençons par noter qu'à gauche de l'identité, on a :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = \text{Tr}({}^tAA),$$

calcul déjà effectué dans l'exercice 11.5. Notons aussi que comme A est symétrique, on a $\text{Tr}({}^tAA) = \text{Tr}(A^2)$. Pour faire le lien avec les valeurs propres de A , diagonalisons A en base orthonormée (possible car A symétrique réelle). Il existe donc P (qu'on peut prendre orthogonale) telle que :

$$P^{-1}AP = \text{diag}\left(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{\dim(E_{\lambda_1}(A)) \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{\dim(E_{\lambda_p}(A)) \text{ fois}} \right) = D.$$

On en déduit que :

$$A^2 = (PDP^{-1})^2 = PD^2P^{-1} = P \text{diag}\left(\underbrace{\lambda_1^2, \dots, \lambda_1^2}_{\dim(E_{\lambda_1}(A)) \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_p^2, \dots, \lambda_p^2}_{\dim(E_{\lambda_p}(A)) \text{ fois}} \right) P^{-1}$$

On obtient alors (comme deux matrices semblables ont même trace) que :

$$\text{Tr}(A^2) = \text{Tr}(D^2) = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \dim(E_{\lambda_i}(A)).$$

D'où l'égalité souhaitée.

Exercice 18.11 (★★ - 📌)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $B = {}^tAA$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

1. Montrer que B est symétrique et que $B = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
2. Soit $\lambda \in \text{Spec}(B)$ et X un vecteur propre de B associé à λ . En calculant de deux façons $\langle BX, X \rangle$, montrer que $\lambda \geq 0$.
3. Montrer que $E_0(A) = E_0(B)$ et en déduire que $\text{rg}(B) = \text{rg}(A)$.

Exercice 18.12 (★★★)

On munit \mathbb{R}^n de son produit scalaire canonique, et on considère (u_1, \dots, u_p) une famille libre de \mathbb{R}^n , avec $p \leq n$. On définit une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $f(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, u_i \rangle u_i$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique, et déterminer son noyau et son image.
2. On suppose à présent que $p = n$.

- (a) Montrer que les valeurs propres de f sont toutes strictement positives.
 (b) Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique g , dont toutes les valeurs propres sont strictement positives, et tel que $g^2 = f^{-1}$.
 (c) Établir que $(g(u_1), \dots, g(u_n))$ est une base orthonormée de E .

1. Montrons que f est linéaire. Pour tout $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= \sum_{i=1}^p \langle \lambda x + \mu y, u_i \rangle u_i \\ &= \lambda \sum_{i=1}^p \langle x, u_i \rangle u_i + \mu \sum_{i=1}^p \langle y, u_i \rangle u_i \text{ par bil. du prod. scal.} \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \end{aligned}$$

Montrons que f est symétrique. Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \langle f(x), y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^p \langle x, u_i \rangle u_i, y \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^p \langle x, u_i \rangle \langle u_i, y \rangle \end{aligned}$$

par bilinéarité du produit scalaire. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \langle x, f(y) \rangle &= \left\langle x, \sum_{i=1}^p \langle y, u_i \rangle u_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^p \langle y, u_i \rangle \langle x, u_i \rangle \end{aligned}$$

toujours par bilinéarité du produit scalaire. Par symétrie cette fois, on a que $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$. Ceci étant vrai pour tout $x, y \in E$, on a bien que f est symétrique.

On a :

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(x) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^p \langle x, u_i \rangle u_i = 0_E \\ &\Leftrightarrow \langle x, u_i \rangle = 0 \text{ par liberté de la famille } (u_i)_{i=1, \dots, p} \\ &\Leftrightarrow x \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)^\perp. \end{aligned}$$

Ainsi on a $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)^\perp$. En particulier on a :

$$\dim \text{Ker}(f) = \dim \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)^\perp = n - \dim \text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = n - p$$

par liberté de la famille (u_1, \dots, u_p) .

Pour tout $x \in E$, on a $f(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, u_i \rangle u_i \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. Donc on a $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. D'autre part on a :

$$\dim \text{Im}(f) \underset{\text{th. du rang}}{=} \dim(E) - \dim \text{Ker}(f) = n - (n - p) = p = \dim \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$$

par liberté de la famille (u_1, \dots, u_p) . D'où l'égalité :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p).$$

2. Puisque $p = n$, (u_1, \dots, u_n) est une base de E car libre et de cardinal égal à la dimension. On déduit de ce qui précède que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$, $\text{Im}(f) = E$ et donc que f est un automorphisme (bijectif et linéaire de E dans E).

- (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f et $x \neq 0_E$ un vecteur propre associé. On a :

$$\langle x, f(x) \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \langle x, f(x) \rangle &= \langle x, \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle \langle x, u_i \rangle \text{ par bil. du prod. scal.} \\ &= \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle^2. \end{aligned}$$

Ainsi on a $\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle^2}{\|x\|^2} \geq 0$. Comme de plus $\lambda \neq 0$ car f est un isomorphisme, on en déduit que toutes les valeurs propres de f sont strictement positives.

- (b) Comme f est symétrique réelle, elle est diagonalisable en base orthonormée. Il existe donc $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (non nécessairement distinctes) tel que :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

De plus on a :

$$M_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\frac{1}{\lambda_n}} \end{pmatrix}^2.$$

Soit g l'unique endomorphisme de E tel que $M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\frac{1}{\lambda_n}} \end{pmatrix}$. Un tel

endomorphisme existe et est unique car l'application

$$\Phi_{\mathcal{B}} : g \in \mathcal{L}(E) \mapsto M_{\mathcal{B}}(g) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Puisque cette matrice est symétrique dans une base orthonormée, on a que g est un endomorphisme symétrique, à valeurs propres strictement positives, et tel que $M_{\mathcal{B}}(g^2) = M_{\mathcal{B}}(g)^2 = M_{\mathcal{B}}(f^{-1})$. Ainsi on a bien $g^2 = f^{-1}$ (par injectivité de $\Phi_{\mathcal{B}}$).

(c) Montrons que c'est une famille orthonormale. Soit donc $1 \leq i, j \leq n$. On a :

$$\begin{aligned}\langle g(u_i), g(u_j) \rangle &= \langle u_i, g^2(u_j) \rangle \text{ car } g \text{ sym.} \\ &= \langle u_i, f^{-1}(u_j) \rangle\end{aligned}$$

On cherche donc $f^{-1}(u_j)$. On a pour cela :

$$u_j = f \circ f^{-1}(u_j) = \sum_{k=1}^n \langle f^{-1}(u_j), u_k \rangle u_k$$

Par liberté de la famille (u_1, \dots, u_n) , on en déduit que :

$$\langle f^{-1}(u_j), u_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}.$$

D'où en reportant dans le calcul précédent :

$$\langle g(u_i), g(u_j) \rangle = \langle u_i, f^{-1}(u_j) \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

Ainsi $(g(u_1), \dots, g(u_n))$ est une famille orthonormée de E . Comme son cardinal est égal à $\dim(E)$, c'est donc une base orthonormée de E .

Exercice 18.13 (★★★ - QSP ESCP 2015)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A {}^tA$.

On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Montrer que $A = 0$.

Exercice 18.14 (★★★★ - Endomorphismes antisymétriques - HEC 2017 - 🐞)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Dans tout l'exercice, on considère un endomorphisme φ de E antisymétrique, c'est-à-dire tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x, \varphi(y) \rangle = -\langle \varphi(x), y \rangle.$$

1. Établir les propriétés suivantes :

- Pour tout $x \in E$, on a : $\langle x, \varphi(x) \rangle = 0$.
- $\text{Im}(\varphi) = \text{Ker}(\varphi)^\perp$.
- Soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que si F est stable par φ , alors F^\perp est stable par φ .
- $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\varphi^2)$, où $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.
- Le spectre de φ est soit vide, soit réduit à $\{0\}$.

2. Montrer que toutes les valeurs propres de φ^2 sont négatives ou nulles.

3. Soit :

- F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \geq 2$,
- α un réel strictement positif,
- u un endomorphisme antisymétrique de F tel que $u^2 = -\alpha^2 \text{Id}_F$, où Id_F est l'endomorphisme identité de F .

- (a) On suppose que $p = 2$. Établir l'existence d'une base orthonormale de F dans laquelle la matrice A_α de u est donnée par : $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.
- (b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence sur p , montrer qu'il existe une base orthonormale de F dans laquelle la matrice B_α de u est de la forme :

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} A_\alpha & (0) & \dots & (0) \\ (0) & A_\alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \dots & (0) & A_\alpha \end{pmatrix}.$$

1. (a) Comme φ est antisymétrique, on a pour tout $x \in E$ (en prenant $y = x$ dans la définition) :

$$\langle \varphi(x), x \rangle = -\langle x, \varphi(x) \rangle \Rightarrow \langle x, \varphi(x) \rangle = 0.$$

Remarque. On peut montrer que la réciproque est vraie : supposons que φ soit un endomorphisme de E tel que pour tout $x \in E$, $\langle x, \varphi(x) \rangle = 0$. Pour tout $x, y \in E$, on a donc :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x + y, \varphi(x + y) \rangle = \langle x + y, \varphi(x) + \varphi(y) \rangle \text{ car } \varphi \text{ lin.} \\ &= \underbrace{\langle x, \varphi(x) \rangle}_{=0} + \langle x, \varphi(y) \rangle + \langle y, \varphi(x) \rangle + \underbrace{\langle y, \varphi(y) \rangle}_{=0} \text{ par bil. du prod. scal.} \\ &= \langle x, \varphi(y) \rangle + \langle \varphi(x), y \rangle \end{aligned}$$

Donc φ est bien un endomorphisme antisymétrique.

- (b) Soit $x \in \text{Ker}(\varphi)$ et $y \in \text{Im}(\varphi)$. Il existe $z \in E$ tel que $y = \varphi(z)$. On a :

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \varphi(z) \rangle = -\langle \varphi(x), z \rangle = -\langle 0_E, z \rangle = 0$$

Les sous-espaces $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$ sont donc orthogonaux. Ils sont donc en particulier en somme direct (propriété du cours). Comme de plus par le théorème du rang, on a $\dim E = \dim \text{Ker}(\varphi) + \dim \text{Im}(\varphi)$, $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$ sont bien supplémentaires orthogonaux dans E .

- (c) Soit F stable par φ . Montrons que F^\perp est aussi stable par φ , c'est-à-dire que pour tout $x \in F^\perp$, on a $\varphi(x) \in F^\perp$. Prenons pour cela $y \in F$. On a :

$$\langle \varphi(x), y \rangle \stackrel{\varphi \text{ antisym.}}{=} -\underbrace{\langle x, \varphi(y) \rangle}_{\substack{\in F^\perp \\ \in F}} = 0.$$

Donc $\varphi(x) \in F^\perp$, et F^\perp est bien stable par φ .

- (d) On a déjà que $\text{Ker}(\varphi) \subset \text{Ker}(\varphi^2)$ puisque pour tout $x \in \text{Ker}(\varphi)$, on a $\varphi(x) = 0_E$ et donc $\varphi^2(x) = \varphi(0_E) = 0_E$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \text{Ker}(\varphi^2)$. On a donc $\varphi(x) \in \text{Ker}(\varphi) \cap \text{Im}(\varphi) = \{0_E\}$ puisque $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$ sont en somme direct. Donc $\varphi(x) = 0_E$ et x appartient bien à $\text{Ker}(\varphi)$. D'où le résultat.

- (e) Supposons qu'il existe une valeur propre λ de φ et $x \neq 0_E$ un vecteur propre associé. On a :

$$0 = \langle \varphi(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2.$$

Puisque $\|x\|^2 \neq 0$, on a bien que $\lambda = 0$. Ainsi le spectre de φ est soit vide, soit réduit à $\{0\}$.

Remarque. L'une des propriétés de cours sur les endomorphismes symétriques est que :

$$f \text{ symétrique} \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathcal{B}}(f) \text{ symétrique}$$

lorsque \mathcal{B} est une **base orthonormée**. On peut imaginer une propriété analogue pour les endomorphismes antisymétriques, à savoir :

$$f \text{ antisymétrique} \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathcal{B}}(f) \text{ antisymétrique,}$$

toujours en supposant \mathcal{B} orthonormée. Montrons que c'est effectivement le cas.

\Rightarrow Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice de f dans la base **orthonormée** \mathcal{B} .

Supposons que f est antisymétrique. Par définition de la matrice d'une application linéaire, et avec l'expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée, on a pour tout $1 \leq i, j \leq n$:

$$a_{i,j} = \langle e_i, f(e_j) \rangle \underset{f \text{ antisym}}{=} -\langle f(e_i), e_j \rangle = -a_{j,i}$$

\Leftarrow Réciproquement, supposons que ${}^t A = -A$, soit encore que $a_{i,j} = -a_{j,i}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. On a donc :

$$\langle e_i, f(e_j) \rangle = -\langle f(e_i), e_j \rangle$$

Prenons $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ des vecteurs de E . On a :

$$\begin{aligned} \langle f(x), y \rangle &= \left\langle f \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right), \sum_{i=1}^n y_i e_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle f(e_i), e_j \rangle \text{ par lin de } f \text{ et bil du prod. scal.} \\ &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, f(e_j) \rangle \\ &= - \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, f \left(\sum_{j=1}^n y_j e_j \right) \right\rangle \text{ par lin de } f \text{ et bil du prod. scal.} \\ &= - \langle x, f(y) \rangle \end{aligned}$$

2. Remarquons tout d'abord que φ est symétrique. Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\langle \varphi^2(x), y \rangle \underset{\varphi \text{ antisym.}}{=} -\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle \underset{\varphi \text{ antisym.}}{=} \langle x, \varphi^2(y) \rangle.$$

Donc φ^2 est bien symétrique. Soit maintenant λ une valeur propre de φ^2 (nécessairement réelle donc par le cours), et x un vecteur propre associé. On a :

$$\langle x, \varphi^2(x) \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$$

et d'autre part :

$$\langle x, \varphi^2(x) \rangle \underset{\varphi \text{ antisym.}}{=} -\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = -\|\varphi(x)\|^2.$$

Puisque $\|x\|^2 \neq 0$ (car x vecteur propre), on obtient donc $\lambda = -\frac{\|\varphi(x)\|^2}{\|x\|^2} \leq 0$. D'où le résultat.

3. (a) Procédons par analyse-synthèse. On cherche une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de F telle que $M_{\mathcal{B}}(u) = A_\alpha$, c'est-à-dire satisfaisant :

$$u(e_1) = \alpha e_2 \quad \text{et} \quad u(e_2) = -\alpha e_1.$$

Comme u est antisymétrique, si on prend e_1 quelconque, $e_2 = \frac{1}{\alpha}u(e_1)$, on aura automatiquement que (e_1, e_2) est orthogonale d'après 1.(a). On obtient donc aucune condition sur e_1 , à part que c'est un vecteur de norme 1, et on prendra $e_2 = \frac{1}{\alpha}u(e_1)$.

Regardons à présent si cela fonctionne : soit e_1 quelconque de norme 1, et prenons $e_2 = \frac{1}{\alpha}u(e_1)$. On a :

- d'après 1.(a), (e_1, e_2) est orthogonale,
- $u(e_1) = \alpha e_2$ et $u(e_2) = \frac{1}{\alpha}u^2(e_1) = -\frac{\alpha^2}{\alpha}e_1 = -\alpha e_1$,
- $\|e_1\| = 1$ par définition, et on a :

$$\begin{aligned} \|e_2\|^2 &= \langle e_2, e_2 \rangle = \frac{1}{\alpha^2} \langle u(e_1), u(e_1) \rangle \underset{u \text{ antisym.}}{=} -\frac{1}{\alpha^2} \langle e_1, u^2(e_1) \rangle \\ &= -\frac{1}{\alpha^2} \langle e_1, -\alpha^2 e_1 \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle = \|e_1\|^2 = 1 \end{aligned}$$

Donc la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est orthonormale, de cardinal $2 = \dim(F)$. C'est donc une base orthonormée de l'espace F .

- La matrice $M_{\mathcal{B}}(u)$ est bien A_α , d'après le deuxième point précédent.

D'où l'existence de la base orthonormée souhaitée.

- (b) Montrons par récurrence (forte) la propriété $\mathcal{H}(p)$: « Si G est un sous-espace vectoriel de dimension $\leq p$, il existe une base orthonormée de G dans laquelle la matrice de u est de la forme B_α .

Init. La propriété est évidemment vraie pour $p = 0$, puisqu'il n'y a alors rien à démontrer.

Hér. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang p , et montrons là au rang $p + 1$. Soit pour cela F un espace vectoriel de dimension $p + 1$, et u un endomorphisme de F satisfaisant les propriétés énoncées dans le sujet. Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2)$ une famille orthonormale de F définie comme dans la question précédente. Prenons $G = \text{Vect}(e_1, e_2)^\perp$. On a $\dim(G) = p - 1$, et G est stable par u par 1.(c). Considérons l'endomorphisme \tilde{u} induit sur G . Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_2 = (e_3, \dots, e_{p+1})$ telle que la matrice de \tilde{u} dans \mathcal{B}_2 est de la forme B_α . Comme $F = G \oplus G^\perp$, on a que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_{p+1})$ est une base orthonormée de F dans laquelle la matrice de u est bien de la forme B_α souhaitée.

On peut donc conclure par principe de récurrence.

Remarque. Notre raisonnement implique que l'existence d'un tel endomorphisme sur F impose que $\dim(F)$ soit pair.

Formes quadratiques

Exercice 18.15 (★)

1. Déterminer les formes quadratiques q_1 et q_2 associées aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la matrice dont proviennent les formes quadratiques suivantes :

$$q_3((x, y, z)) = 2xy + 2xz + 2yz ; q_4((x, y, z)) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - yz.$$

3. Déterminer le signe des 4 formes quadratiques précédentes.
-

Exercice 18.16 (★★ - Quotients de Rayleigh)

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique de E . Soit λ la plus petite valeur propre de f et μ la plus grande valeur propre.

1. Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, on a : $\lambda \leq \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2} \leq \mu$.

2. En déduire que :

$$\lambda = \min_{x \neq 0} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2} \text{ et que } \mu = \max_{x \neq 0} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2}.$$

Exercice 18.17 (★★★ - Matrices symétriques définies positives -)

On dit qu'une matrice symétrique M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, on a $q_M(X) = {}^t X M X > 0$.

1. Soit $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer que $M = {}^t L L$ est une matrice symétrique définie positive.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

- (a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) M est définie positive.
- (ii) Les valeurs propres de M sont strictement positives.
- (iii) Il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $M = {}^t P D P$.
- (iv) Il existe une matrice symétrique et inversible $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = L^2$.

- (b) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $L = P(M)$.
-