TD2

Sommes et séries

Calcul de sommes et de produits

Exercice 2.1 (★)

Soit n un entier naturel. Calculer :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2^k+4k+n-3)$;

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$;

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k$;

d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+3}{2k-1}$;

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$ à l'aide du changement de variables $i=2n+1-k$;

f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ où $\theta\in\mathbb{R}$.

Sommes doubles

Exercice 2.2 (★)

Soit n un entier naturel non nul. Calculer :

a) $\displaystyle\sum_{0\le i,j\le n}(i+j)^2$;

b) $\displaystyle\sum_{0\le i<j\le n} ij$;

c) $\displaystyle\sum_{0\le i,j\le n} x^{i+j}$ avec $x\in\mathbb{R}$;

d) $\displaystyle\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}\frac{3^i4^j}{5^{i+j}}$;

e) $\displaystyle\sum_{1\le j<i\le n}\frac{j}{i}$;

f) $\displaystyle\sum_{0\le i\le j\le n}\frac{i}{j+1}$.

Exercice 2.3 (★)

Soit n un entier naturel. On considère la somme double $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n}2^j$.

a) Calculer de deux manières différentes la somme double S_n. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k2^{k-1}=(n-1)2^n+1$.

b) Déterminer alors la valeur de la somme double $T_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i+1}k2^{k-1}$.

Développements limités et relations de comparaisons

Exercice 2.4 (★)

Calculer les développements limités suivants en 0 :

1. $x\mapsto\dfrac{1}{2+x}$ à l'ordre 4 ;
2. $x\mapsto\ln(e+x)$ à l'ordre 4 ;
3. $x\mapsto a^x+b^x$ à l'ordre 3 ;
4. $x\mapsto\cos(x)-\dfrac{\sin(x^2)}{2}$ à l'ordre 4 ;
5. $x\mapsto(1+\exp(x))^2$ à l'ordre 3.
6. $x\mapsto\sin(x)\cos(2x)$ à l'ordre 4.
7. $x\mapsto\dfrac{\sin(x)}{1-x^2}$ à l'ordre 4.
8. $x\mapsto\dfrac{1+x}{1-x}$ à l'ordre 3.

Exercice 2.5 (★)
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-\cos(x)-x}{(\ln(1+x))^2}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(\ln(1+x)+1-e^x)}{\sin(x)-x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+2)(x-1)}{x\ln(x)}$

Exercice 2.6 (★)

1. À l'aide de la formule de Taylor-Young, montrer que $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x)-x}{2x-2\ln(1+x)-(\sin(x))^2}$.

1. La fonction $f = \arctan$ étant de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$, elle admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 qui est :
$$\arctan(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$
Comme *arctan* est impaire, on a en fait plus précisément que :
$$\arctan(x) = f'(0)x + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$
Reste donc à calculer les valeurs manquantes :
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad , \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}$$
soit $f'(0) = 1$ et $f^{(3)}(0) = -2$. On en déduit en remplaçant dans le développement limité que :
$$\arctan(x) = x + \frac{-2}{3!}x^3 + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$
2. On obtient donc que $\arctan(x) - x \sim_0 -\dfrac{x^3}{3}$. D'autre part on a :
$$\begin{aligned} 2x - 2\ln(1+x) - (\sin(x))^2 &= 2x - 2\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - (x + o(x^2))^2 \\ &= 2x - 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + o(x^3) = -\frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \sim_0 -\frac{2}{3}x^3 \end{aligned}$$
Ainsi on a $\dfrac{\arctan(x)-x}{2x-2\ln(1+x)-(\sin(x))^2} \sim_0 \dfrac{-\frac{x^3}{3}}{-\frac{2x^3}{3}} = \dfrac{1}{2}$, et donc
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)-x}{2x-2\ln(1+x)-(\sin(x))^2} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2.7 (★)

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $u_n = (2n-1)^3$, alors :

   ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^3)$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 8n^3$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^4)$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{n^4}{2}\right)$

2. Si $u_n = \frac{2}{n} - \frac{3}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}$, alors :

   ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ ☐ $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ ☐ $u_n = \frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$

   ☐ $u_n = \frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

3. Soit (u_n) une suite réelle. Alors on a $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

4. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors :

   ☐ $u_n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n + 1$ ☐ $2u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ☐ $-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n$ ☐ $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$ ☐ $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$

   ☐ $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$

Exercice 2.8 (★)

Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{2^n + (-1)^n}{3n + (-1)^{n+1}}$
2. $u_n = \sqrt[n]{n}$
3. $u_n = n^2\left(\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1}\right)$
4. $u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$
5. $u_n = \dfrac{3n^2 + (-1)^n}{\sqrt{n^2+2} + \ln(n)}$

Séries

Exercice 2.9 (★)

Justifier la convergence et déterminer la somme des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$

Exercice 2.10 (★)

Déterminer si les séries suivantes convergent, et le cas échéant, calculer leur somme :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{3^{2n+1}}{n!} \qquad \sum_{n\geq 1} n2^{n-1} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n!} \qquad \sum_{n\geq 1} n\frac{3^n}{4^{n+1}} \qquad \sum_{n\geq 2} \frac{n(n-1)}{2^{n+1}}$$

Exercice 2.11 (★★)

Déterminer la nature des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum \frac{n^3 + 2n}{n^4 + n^3 + 1}$

b) $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2 - \ln n}$

c) $\displaystyle\sum n - \sin\frac{1}{n}$

d) $\displaystyle\sum n \times \sin\frac{1}{n^2}$

e) $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

f) $\displaystyle\sum \frac{n^2 \ln n}{e^n}$

g) $\displaystyle\sum \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2$

h) $\displaystyle\sum \frac{\sqrt{n+1}}{\ln(n)^3 n^2}$

i) $\sum \frac{\arctan n}{n^2}$ | j) $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$ | k) $\sum \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$ | l) $(\ln n)^{100}$ $\sum_{n\geq 1} \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n}{n-1}\right)$

Exercice 2.12 (★★)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^n$.

1. Déterminer suivant la valeur du paramètre α la limite de la suite (u_n).
2. Déterminer suivant la valeur du paramètre α la nature de la série $\sum(u_n - 1)$.

Exercice 2.13 (★)

Étudier la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

a) $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$ | b) $u_n = \frac{(-1)^n(n+2)}{(n^3+1)}$ | c) $u_n = \frac{(1+n)\sin n}{n^2\sqrt{n}}$ | d) $u_n = \cos(n)\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

Exercice 2.14 (★★ - Développement en série entière du cosinus)

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$.
2. En déduire que $\cos^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ (-1)^p & \text{si } k = 2p \text{ est pair} \end{cases}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\left|\cos(x) - \sum_{k=0}^{n} \cos^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\sum_k \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ est convergente et que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x)$.

> 1. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)$.
>
> **Init.** Pour $k=0$, $\cos^{(0)}(x) = \cos(x) = \cos\left(x + 0\frac{\pi}{2}\right)$, donc la propriété est vraie au rang 0.
>
> **Hér.** Soit $k \in \mathbb{N}$, et supposons la propriété au rang k. On a par hypothèse de récurrence :
> $$\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right).$$
> On dérive (tout est bien dérivable sur $\mathbb{R}$) :
> $$\cos^{(k+1)}(x) = -\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left((x+k\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$
> car on a $-\sin(\theta) = \cos(\theta + \frac{\pi}{2})$ (on s'en convaincra en traçant un cercle trigonométrique !).
> D'où la propriété au rang $k+1$.

Concl. Par principe de récurrence, on a bien que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$\cos^{(k)}(0) = \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ (-1)^p & \text{si } k = 2p \text{ est pair} \end{cases}.$$

Là aussi, si la dernière égalité n'est pas claire, on pourra s'en convaincre en traçant un cercle trigonométrique et en regardant pour $k = 0, 1, 2, 3$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique alors l'inégalité de Taylor Lagrange entre $x \in \mathbb{R}$ et 0 à cos qui est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. On a $|\cos^{(n+1)}(x)| = |\cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)| \leq 1$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\cos(x) - \sum_{k=0}^{n} \cos^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

4. D'après les calculs précédents, on en déduit donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\cos(x) - \sum_{k=0}^{2n} \cos^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

soit encore

$$\left|\cos(x) - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\frac{x^{2i}}{2i!}\right| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$, on obtient donc que la série de terme général $\sum_k \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ est convergente et que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x)$.

Exercice 2.15 (★★★ - QSP HEC 2014)

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la série de terme général u_n soit convergente.
2. Calculer alors la somme de cette série.

Exercice 2.16 (★★★ - QSP HEC 2008)

Représenter dans le plan l'ensemble des points de coordonnées (a, b) tels que $a, b > 0$ et la série de terme général $u_n = \frac{a^n}{1+b^n}$ soit convergente.

On a trois cas à distinguer :

- Si $0 < b < 1$: dans ce cas, on a $b^n \to 0$. Ainsi on a $u_n \sim a^n$. De plus on a $a > 0$ et $\sum a^n$ converge si et seulement si $0 < a < 1$. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum u_n$ converge si et seulement si $0 < a < 1$.

- Si $b = 1$: dans ce cas on a $u_n = \frac{a^n}{2}$. C'est donc une série géométrique de raison a qui converge si et seulement si $|a| = a < 1$.

- Si $b > 1$: dans ce cas on a $b^n \to +\infty$. Ainsi on a $u_n \sim \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$. De plus on a $\frac{a}{b} > 0$ et $\sum \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ converge si et seulement si $0 < \frac{a}{b} < 1$, soit si et seulement si $0 < a < b$. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum u_n$ converge si et seulement si $0 < a < b$.

Reste à représenter les trois domaines suivants dans le plan :

$$E_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < a, b < 1\},\ E_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ b = 1 \text{ et } 0 < a < 1\},$$

$$E_3 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ b > 1 \text{ et } 0 < a < b\}.$$

Exercice 2.17 (★★★ - QSP HEC 2014)

Soit α un réel donné. Pour tout $n \geq 1$, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$.

1. Étudier suivant les valeurs de α, la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$. En cas de convergence, on précisera la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
2. Étudier la nature de la série de terme général u_n.
3. Soit x un réel vérifiant $|x| < 1$. Étudier suivant les valeurs du réel α, la convergence de la série de terme général $u_n x^n$.

1. L'idée est de reconnaitre une somme de Riemann dans l'expression de u_n, le n apparaissant à la fois dans l'intervalle de sommation et dans le terme général de la somme. Commençons par un rappel.

   Sommes de Riemann.

   Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors on a :

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

   Dans notre cas, on a :

   $$u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+(k/n))^\alpha}\right) = \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n)\right)$$

   où $f : x \in [0,1] \to \dfrac{1}{(1+x)^\alpha}$. Cette fonction étant continue, on a :

   $$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^\alpha} = \begin{cases} [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2) & \text{si } \alpha = 1 \\ \left[\dfrac{(1+t)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2^{\alpha-1}(1-\alpha} - \dfrac{1}{(1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}.$$

   Notons C ce réel. On obtient donc que :

   $$u_n \sim \frac{C}{n^{\alpha-1}}.$$

On peut donc conclure que $\lim u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 1 \\ C = \ln(2) & \text{si } \alpha = 1 \\ \pm\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$.

2. On a montré que $u_n \sim \dfrac{C}{n^{\alpha-1}}$. La série $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$ converge si et seulement si $\alpha > 2$. Par comparaison des séries à termes de signe constant, on en déduit que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

3. On a $|u_n x^n| \sim \dfrac{|C|}{n^{\alpha-1}}|x|^n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées. Par théorème de comparaison à une série de Riemann convergente, on en déduit que $\sum u_n x^n$ converge absolument, donc converge.

Exercice 2.18 (★★★★ - Oral HEC 2013)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \dfrac{x^n}{n}$.

1. (a) Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $(u_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers 0.
   (b) Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est absolument convergente.

2. (a) Soit $x \in [-1, 1[$. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^x t^{k-1}\,\mathrm{d}t$, et en déduire que si $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(x) = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

   (b) Montrer que si $x \in [-1, 1[$, on a : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$.
   (c) En déduire que $\forall x \in [-1, 1[$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est convergente et donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

3. (a) Établir la convergence de la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^2-1}$ et calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2-1}$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1[$, la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{x^n}{n^2-1}$ est convergente et calculer sa somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2-1}$.
   (c) L'application f de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2-1}$ est-elle continue ?

1. (a) Si $|x| \leq 1$, alors $|u_n| \leq \dfrac{1}{n}$ et converge donc vers 0. Si $|x| > 1$, alors $|u_n| = \dfrac{|x|^n}{n} \to +\infty$ par croissances comparées, et donc (u_n) ne tend pas vers 0.
   (b) Pour $|x| < 1$, on a $n^2|u_n| = n|x|^n \to 0$ par croissances comparées. Donc $\sum u_n$ converge absolument par théorème de comparaison.
   Pour $|x| = 1$, $|u_n| = \dfrac{1}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge en tant que série harmonique.

Pour $|x| > 1$, $\sum |u_n|$ diverge grossièrement, donc diverge.

2. (a) Soit $x \in [-1, 1[$. On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^x t^{k-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^x = \frac{x^k}{k}.$$

On obtient donc :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\,\mathrm{d}t \underbrace{=}_{t\neq 1 \text{ car } -1\leq x<1} \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Posons la fonction $f(t) = \dfrac{1}{1-t}$. Elle est définie, continue et dérivable sur $]-\infty, 1[$, et on a $f'(t) = \dfrac{1}{(1-t)^2}$. Donc f est croissante et positive. On obtient alors selon les cas :

- Si $x \geq 0$, $0 \leq \dfrac{t^n}{1-t} \leq \dfrac{x^n}{1-x}$ pour tout $0 \leq t \leq x$, et donc :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{x^{n+1}}{1-x} \to 0.$$

- Si $x < 0$, on a :

$$\left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^0 \frac{|t|^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1-x}\,\mathrm{d}t \leq \frac{(-1)^n}{1-x}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_x^0 = \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n+1} \longrightarrow 0$$

car $0 \leq (-x)^{n+1} \leq 1$.

Ainsi on a bien que pour tout $x \in [-1, 1[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$.

(c) D'après les questions précédentes, on en déduit donc que $\forall x \in [-1, 1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est convergente et on a en passant à la limite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = -\ln(1-x).$$

3. (a) On a :

• $\dfrac{1}{n^2-1} \sim \dfrac{1}{n^2}$, • $\dfrac{1}{n^2} \geq 0$	• $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).

Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1}$ converge. De plus on a $\dfrac{1}{n^2-1} = \dfrac{1}{(n-1)(n+1)}$. On cherche donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$$

En mettant tout sur le même dénominateur et en identifiant, on obtient que $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$, et donc :

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)} - \frac{1}{2N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4}.$$

Ainsi on a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$.

(b) Pour tout $x \in [-1,1[$, on a :

- $\left|\dfrac{x^n}{n^2-1}\right| \sim \dfrac{|x|^n}{n^2}$,
- $0 \le \dfrac{|x|^n}{n^2} \le \dfrac{1}{n^2}$,
- $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

Donc la série $\displaystyle\sum_{n\ge 2} \frac{x^n}{n^2-1}$ est absolument convergente, donc convergente.

Pour tout $N \ge 2$, pour tout $x \in [-1,1[$ avec $x \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} \frac{x^n}{n^2-1} &= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} \frac{x^n}{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} \frac{x^n}{n+1} = \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{N-1} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{2x}\sum_{n=3}^{N+1} \frac{x^n}{n} \\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{x}{2}\ln(1-x) - \frac{-\ln(1-x) - x - x^2/2}{2x}\end{aligned}$$

Ainsi on a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1} = \frac{\ln(1-x) + x + x^2/2 - x^2\ln(1-x)}{2x}$ pour $x \neq 0$. Enfin cette somme vaut 0 si $x = 0$.

(c) Posons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$. On a vu que f est définie sur $[-1,1]$, et on a obtenu une autre expression de f :

$$\forall x \in [-1,1[,\ x \neq 0, \quad f(x) = \frac{\ln(1-x) + x + x^2/2 - x^2\ln(1-x)}{2x}$$

En particulier, f est continue sur $[-1,0[$ et sur $]0,1[$ comme somme et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
Quand $x \to 0$, on a $\ln(1-x) + x + x^2/2 - x^2\ln(1-x) = o(x^2)$, et donc $f(x) = o(x)$.
En particulier $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et f est continue en 0
Posons enfin $h = 1-x$, de sorte que quand $x \to 1^-$, alors $h \to 0^+$. On a :

$$\begin{aligned}f(x) = f(1-h) &= \frac{\ln(h) + (1-h) + \frac{(1-h)^2}{2} - (1-h)^2\ln(h)}{2(1+h)} \\ &= \frac{\ln(h) + (1-h) + \frac{(1-h)^2}{2} - (1-2h+h^2)\ln(h)}{2(1+h)} \\ &= \frac{(1-h) + \frac{(1-h)^2}{2} + (2h-h^2)\ln(h)}{2(1+h)} \\ &\underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} = f(1).\end{aligned}$$

Ainsi f est aussi continue en 1 également. Donc f est bien continue sur $[-1, 1]$.

Autour de la série harmonique

Exercice 2.19 (★★ - Étude de la série harmonique - ✍)

On s'intéresse au problème suivant :

> On suppose avoir une infinité de kaplas (petits pavés en bois de 12 cm de long et de 8mm d'épaisseur) à notre disposition. En partant d'une tour bien droite, et en poussant intelligemment les kaplas, jusqu'où peut-on faire pencher cette pile avant qu'elle ne tombe ?

La réponse à ce problème est à découvrir dans cette vidéo. On cherche ici à retrouver les résultats qui y sont exposés. Considérons pour cela la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. **Divergence de la série harmonique.**

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$. En déduire que la série harmonique diverge.

2. **Équivalent de H_n lorsque $n \to +\infty$.**

   (a) Justifier l'inégalité suivante pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

   $$H_{n+1} - 1 \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq H_n.$$

   (c) Donner un équivalent de H_n lorsque $n \to +\infty$.

3. **Recherche d'un développement asymptotique de H_n.**

   Posons $\gamma_n = H_n - ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, γ_n appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

   (b) Montrer que $\ln(1 + x) \leq x$ pour tout $x > -1$. En déduire que $\gamma_n - \gamma_{n-1} \leq 0$ pour tout $n \geq 2$.
   Conclure que (γ_n) converge vers un réel $\gamma \in \mathbb{R}$. Le réel γ est appelé la *constante d'Euler* ($\gamma \simeq 0,577$).

   (c) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

4. **Programmation.**

   (a) Écrire à l'aide de `Scilab` une fonction `function p = kaplas(n)` qui à n le nombre de kaplas à disposition, renvoie le réel p égal au maximum de l'inclinaison de la pile de n kaplas.

   (b) Vérifier le résultat pour une tour de kaplas haute comme la tour Eiffel (324 m) ? Et pour une tour de kaplas de votre taille ?

Exercice 2.20 (★★)

Déterminer la nature des séries $\sum \frac{H_n}{n}$ et $\sum \frac{H_n}{1 + 2 + \cdots + n}$.

À l'aide de l'équivalent obtenu à la question précédente, on a :

$$\frac{H_n}{n} \sim \frac{\ln(n)}{n}$$

Or on a :

- $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\ln(n)}{n}$;
- $\dfrac{1}{n}, \dfrac{\ln(n)}{n} \geq 0$
- $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge en tant que série harmonique.

Par théorème de comparaison, on en déduit que $\sum \dfrac{H_n}{n}$ diverge.

Toujours en utilisant l'équivalent obtenu à la question précédente, on a :

$$\frac{H_n}{1+2+\cdots+n} \sim \frac{\ln(n)}{n(n+1)/2} \sim \frac{2\ln(n)}{n^2}$$

Or on a :

- $\dfrac{\ln(n)}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$;
- $\dfrac{1}{n^{3/2}}, \dfrac{\ln(n)}{n^2} \geq 0$
- $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge en tant que série de Riemann avec $\alpha = 3/2 > 1$.

Par théorème de comparaison, on en déduit que $\sum \dfrac{H_n}{1+\cdots+n}$ converge.

Exercice 2.21 (★★ - Série harmonique alternée - ✍)

Considérons la série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles.

1. **Étude de la convergence.**
   (a) La série harmonique alternée est-elle absolument convergente ?
   (b) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée S.
   (c) En déduire que la série harmonique alternée converge et que l'on a $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Remarque. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est un exemple de séries dîtes *alternées*. L'étude de ces séries est fréquente dans les sujets de concours (EDHEC 2008, EML 2016, ECRICOME 2016), et repose, comme pour la série harmonique alternée, sur l'étude des suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}). Pour plus de détails :

☞ **Complément de cours 1. Autour des séries alternées.**

2. **Calcul de** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$**.**

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} = H_{2n} - H_n$.

   (b) En déduire que $S_{2n} = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$, et déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

   (c) Retrouver ce résultat en utilisant le développement asymptotique de la série harmonique.

Séries doubles

Exercice 2.22 (★★)

La famille $(u_{i,j})$ est-elle sommable ? Le cas échéant, préciser sa somme.

a) $(u_{i,j}) = \left(\dfrac{\lambda^{i+j}}{i!j!}\right)_{i,j\geq 0}$;

b) $(u_{i,j}) = \left(\dfrac{(-1)^i j^i}{i!}\right)_{i,j\geq 0}$;

c) $(u_{i,j}) = \left(\dfrac{1}{i^j}\right)_{i\geq 2, j\geq 2}$;

d) $(u_{i,j}) = \left(\dfrac{x^i y^j}{(i+j)!}\right)_{i,j\geq 0}$;

e) $(u_{i,j}) = \left(\dfrac{i+j-1}{2^{i+j-2}}\right)_{i\geq 1, j\geq 0}$;

f) $(u_{i,j}) = \left(\dfrac{(-1)^{i+j}2^j}{i\times j!}\right)_{i\geq 1, j\geq 0}$.

e) Étant donné la présence du terme $(i+j)$ dans l'expression de $u_{i,j}$, on va sommer suivant les diagonales (en notant bien que $i \geq 1$ ce qui change un peu la composition des diagonales par rapport à d'habitude). Notons donc pour tout $n \geq 1$:

$$J_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N},\ i+j=n\} = \{(i, n-i),\ 1 \leq i \leq n\}$$

qui est de cardinal n. On a

- $\displaystyle\sum_{(i,j)\in J_n} |u_{i,j}| = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-1}{2^{n-2}} = \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}$.
- $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}$ est une série géométrique dérivée deux fois, de raison $q = 1/2$. On a $|q| < 1$, donc cette série converge.

Par le théorème de sommation suivant les diagonales, on en déduit que $(u_{i,j})$ est une famille sommable, et on a :

$$\sum_{i\geq 1, j\geq 0} u_{i,j} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(i,j)\in J_n} u_{i,j} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} = \frac{2}{(1-1/2)^3} = 16.$$

f) On a $|u_{i,j}| = \dfrac{2^j}{i\times j!}$. On applique ici le théorème de Fubini (ne se prète pas à une sommation suivant les diagonales...) :

- $\displaystyle\sum_{i\geq 0} \frac{2^j}{i\times j!} = \frac{2^j}{j!}\sum_{i\geq 0}\frac{1}{i}$ diverge en tant que série harmonique. L'étude s'arrête donc ici !

On peut donc conclure que la famille $(u_{i,j})$ n'est pas sommable.

Exercice 2.23 (★★)
Justifier l'existence et déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^p$ et de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)!}$.

Posons $u_{n,p}=\begin{cases}\dfrac{1}{2^p} & \text{si } p\geq n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. On va montrer par Fubini que la famille $(u_{n,p})$ est sommable.

- La série $\displaystyle\sum_{p\geq 0}|u_{n,p}|=\sum_{p\geq n}\frac{1}{2^p}$ est géométrique de raison $q=1/2$. Puisque $|q|<1$, elle converge donc, et sa somme vaut :
$$\frac{1}{2^n}\frac{1}{1-1/2}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$
- La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^{n-1}}$ converge encore une fois en tant que série géométrique de raison $q=1/2$.

Par théorème de Fubini, la famille $(u_{n,p})$ est sommable, et on a :

$$\sum_{(n,p)}u_{n,p}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}u_{n,p}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=2\times\frac{1}{1-1/2}=4.$$

Posons de même $u_{n,k}=\begin{cases}\dfrac{1}{(k+1)!} & \text{si } k\geq n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. On va montrer par Fubini que la famille $(u_{n,k})$ est sommable.

- La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}|u_{n,k}|=\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{(k+1)!}$ converge car c'est une somme finie, et elle vaut
$$\frac{k+1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}.$$
- La série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}$ converge en tant que série exponentielle avec $x=1$.

Par théorème de Fubini, la famille $(u_{n,p})$ est sommable, et on a :

$$\sum_{(n,k)}u_{n,k}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}u_{n,k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n,k}$$

ce qui donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{(k+1)!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}=e.$$