TD20

Fonctions de plusieurs variables sur une partie de $\mathbb{R}^n$

Éléments de topologie de $\mathbb{R}^n$

Exercice 20.1 (★)
Les ensembles suivants sont-ils ouverts/fermés/bornés ?

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 0 \leq x \leq 2, \ -1 \leq y \leq 4 \text{ et } z^2 \leq 9\} \ ; \ B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ 2x^2y - 5z < 3\}$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y = 1 \text{ et } |y| \leq 1\} \ ; \ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x+2y| = 1 \text{ ou } |y+2x| \geq 4\}$$

$$E = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 < 1\} \text{ avec } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ réels strictement positifs}$$

Fonctions $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Exercice 20.2 (★)
On considère la fonction f définie par $f(x,y) = \ln(1+xy)$.

1. Déterminer son ensemble de définition Ω et montrer que c'est un ouvert.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω et déterminer son gradient et sa hessienne en tout point de Ω.
3. Justifier l'existence et déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f en $a = (1,1)$.
4. Déterminer les dérivées directionnelles premières et secondes de f en $a = (1,1)$ dans les directions $u_1 = (1,0)$, $u_2 = (1,1)$, $u_3 = (1,-2)$.

Exercice 20.3 (★★★)
Soit la fonction $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer ses dérivées partielles premières.
2. Calculer $\partial^2_{1,2} f(0,0)$ et $\partial^2_{2,1} f(0,0)$. f est-elle de classe $\mathscr{C}^2$?

Recherche d'extrema sur un ouvert

Exercice 20.4 (★)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2(1+y)^3 + y^2.$$

1. Montrer que f possède un seul point critique.
2. Vérifier que si $\|(x,y)\| \leq 1$, alors $f(x,y) \geq 0$.
3. En déduire que f possède un minimum local en son point critique. Est-ce un minimum global ?

Exercice 20.5 (★)
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, et $a \in \mathbb{R}^n$ un point critique de f. Notons $A = \nabla^2 f(a)$. Conclure sur la nature local de a dans les cas suivants :

- $Spec(A) = \{1, 2\}$
- $Spec(A) = \{2, -2\}$
- $Spec(A) = \{0, -2, -6\}$
- $Spec(A) = \{-2, 0, 2\}$

Exercice 20.6 (★)
Considérons la fonction $f(x, y) = x^3 + xy + y^3$.

1. Représenter graphiquement cette fonction à l'aide de `Scilab`.
2. Déterminer les points critiques de la fonction f.
3. Déterminer graphiquement la nature de ces points critiques. Vérifier ces résultats par le calcul.
4. Déterminer les vecteurs propres de la hessienne de f en le point col. Pouvez vous retrouver graphiquement ces vecteurs ?

Exercice 20.7 (★★)
Soit f la fonction définie sur $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ par

$$f(x, y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}.$$

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert Ω, et calculer ses dérivées partielles premières et secondes.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Montrer que f admet un extremum local sur Ω.

Exercice 20.8 (★★)
Étudier les extrema locaux des fonctions suivantes et préciser s'il s'agit d'extrema globaux. On pourra s'aider de `Scilab` (représentation graphique de la fonction, valeurs propres de la hessienne).

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 \;\; ; \;\; f(x, y) = x((\ln x)^2 + y^2)$$

$$f(x, y, z) = 2x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 2xz \;\; ; \;\; f(x, y, z) = xy + yz + zx - xyz$$

Exercice 20.9 (★★)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$, et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
2. Montrer que f admet exactement cinq points critiques, dont le point $(0, 0, 0)$.
3. Déterminer la matrice hessienne de f en $(0, 0, 0)$, et en déduire que f possède un minimum local en $(0, 0, 0)$. Est ce un minimum global de f ?
4. Pour chacun des autres points critiques, vérifier que 4 est valeur propre de la matrice hessienne, et déterminer si f admet ou non un extremum local en ce point.

Exercice 20.10 (★★ - EML ECE 2014)
On note $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(t) = e^t - te^{\frac{1}{t}}$. On note $U = \mathbb{R}\times]0, +\infty[$ et f la fonction définie sur U par

$$f(x, y) = xy - e^x \ln(y).$$

1. Montrer l'équivalence
$$\varphi(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t - \ln(t) - \frac{1}{t} = 0.$$
En déduire que l'équation $\varphi(t) = 0$ possède une unique solution que l'on déterminera.

2. Montrer que f est $\mathscr{C}^2$ sur U et déterminer ses dérivées partielles premières et secondes.

3. Montrer que (x, y) est un point critique de f si et seulement si :
$$x > 0, \ y = e^{\frac{1}{x}} \ \text{ et } \ \varphi(x) = 0.$$

4. En déduire que f admet un unique point critique sur U.

5. f admet-elle un extremum local sur U ?

Exercice 20.11 (★)
Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy + xy^3$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet un unique point critique.

2. Déterminer les valeurs propres de la hessienne en ce point critique. Peut-on conclure quant à la nature de ce point critique ?

3. Étudier les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$, et conclure.

Exercice 20.12 (★★)
Soit la fonction f définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$ par $f(x, y, z) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$.

1. (a) Vérifier que f possède une infinité de points critiques, et que ceux-ci sont les points de la forme $A_a = (a, a, a)$, où a est un réel strictement positif quelconque.

   (b) Déterminer la matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\nabla^2(f)(A_a) = \dfrac{1}{a^2}M$, puis déterminer les valeurs propres de M. En déduire alors celles de $\nabla^2(f)(A_a)$.

   (c) Cela permet-il de conclure quant à l'existence d'un extremum local de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$?

2. (a) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que pour tout réel z strictement positif, on a :
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{x}{y} + 2\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

   (b) En étudiant la fonction $t \mapsto t + \dfrac{2}{\sqrt{t}}$ sur $]0, +\infty[$, montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a :
$$\frac{x}{y} + 2\sqrt{\frac{y}{x}} \geq 3.$$

   (c) Que peut-on alors conclure ?

Exercice 20.13 (★★)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x, y) = \left(1 + y + xy - \frac{x^2}{2}\right) e^y.$$

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, déterminer ses dérivées partielles premières et secondes.

2. Montrer que f admet un unique point critique (α, β).

3. Vérifier que la détermination des valeurs propres de $\nabla^2 f(\alpha, \beta)$ ne suffit pas à déterminer la nature de ce point critique.

4. Déterminer un vecteur propre u de $\nabla^2 f(\alpha, \beta)$ associé à la valeur propre 0.

5. En étudiant la fonction $t \mapsto f((\alpha, \beta) + tu)$, déterminer la nature du point critique (α, β).

Exercice 20.14 (★★ - Position du graphe par rapport à l'hyperplan tangent en un point - ✍)
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in U$.
On note q_a la forme quadratique associée à la matrice hessienne $\nabla^2(f)(a)$.
On considère la fonction g définie pour tout $x \in U$ par :

$$g(x) = f(x) - f(a) - \langle \nabla(f)(a), x - a \rangle \,.$$

1. Montrer que $g(a) = 0$, que a est un point critique de g et que $\nabla^2(g)(a) = \nabla^2(f)(a)$.

2. En déduire les résultats suivants :
   - Si q_a est strictement positive alors le graphe de f se situe localement au-dessus de l'hyperplan tangent en a.
   - Si q_a est strictement négative alors le graphe de f se situe localement au-dessous de l'hyperplan tangent en a.
   - Si q_a n'est ni positive, ni négative alors le graphe de f traverse l'hyperplan tangent au voisinage de a.

3. **Application.** Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$.
   (a) Étudier localement la position du graphe de f et de son hyperplan tangent en $(1, 1)$, $(-1, -1)$ et $(-1, 1)$.
   (b) `Scilab.` Représenter le graphe de f ainsi que les plans tangents en ces trois points. Vérifier graphiquement les résultats de la question précédente.

Exercice 20.15 (★★★ - Notations de Monge - ✍)
On suppose que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit $a \in U$ un point critique de f.
On note : $r = \partial^2_{1,1}(f)(a)$, $t = \partial^2_{2,2}(f)(a)$ et $s = \partial^2_{1,2}(f)(a)$ de sorte que $\nabla^2(f)(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$.

1. On note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de $\nabla^2(f)(a)$ (non nécessairement distinctes).
   Montrer que $rs - t^2 = \lambda_1 \lambda_2$ et $r + t = \lambda_1 + \lambda_2$.

2. En déduire le résultat suivant :
   - Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ alors f admet un minimum local en a.
   - Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ alors f admet un maximum local en a.
   - Si $rt - s^2 < 0$ alors a est un point selle de f.

3. `Scilab.` Écrire une fonction qui prend en entrée une matrice symétrique 2×2 et qui renvoie la nature du point critique correspondant.

4. **Application.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
   (a) Montrer que f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles premières et secondes.

(b) Montrer que f admet quatre points critiques et les déterminer.

(c) Sans calculer de valeurs propres, déterminer les extrema locaux de f.

Exercice 20.16 (★★★★ - Équation des ondes en dimension 1 - Oral HEC 2017)

1. Soient a et b deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

   Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

   $$f(x,y) = \frac{1}{2}\left[a(x+y) + a(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} b(s)\mathrm{d}s\right].$$

   Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et montrer que $\partial^2_{1,1}(f) - \partial^2_{2,2}(f)$ est l'application nulle. Pour $x \in \mathbb{R}$, préciser les valeurs de $f(x, 0)$ et de $\partial_2(f)(x, 0)$.

2. Dans cette question, f désigne une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

   (a) Montrer qu'il existe une unique application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

   $$f(x, y) = g(x + y, x - y).$$

   Dans la suite, on admettra que l'application g ainsi définie est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

   (b) Si g désigne l'application définie au a), montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

   $$\partial^2_{1,1}(f)(x, y) - \partial^2_{2,2}(f)(x, y) = 4\partial 1{,}2^2(g)(x + y, x - y).$$

   (c) En déduire que si $\partial^2_{1,1}(f) - \partial^2_{2,2}(f)$ est l'application nulle et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, 0) = \partial_2(f)(x, 0) = 0$, alors f est l'application nulle.

3. (a) Montrer qu'il existe une unique application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\partial^2_{1,1}(f) - \partial^2_{2,2}(f)$ soit l'application nulle et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, 0) = x^2$ et $\partial_2(f)(x, 0) = x$, et déterminer cette application.

   (b) Étudier les extremums de f.

Extrema des fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 20.17 (★★ - Extrema des fonctions convexes - ✍)

1. **Rappels et compléments sur les fonctions convexes.**

   Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, convexe.

   (a) Rappeler la définition de f convexe, et en donner différentes caractérisations.

   (b) Soit a un point critique de f. Montrer que f admet un minimum global en a.

2. **Généralisation au cas de fonctions de plusieurs variables.**

   Soit une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$. On suppose que pour tout point x de $\mathbb{R}^n$, la forme quadratique q_x associée à la matrice hessienne de f en x est positive (i.e. $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $q_x(h) \geq 0$). Soit a un point critique de f.

   (a) Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$. Considérons la fonction $g : t \mapsto f(a+tv)$. Montrer que g est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et que a est un point critique de g.

   (b) En déduire que f admet un minimum global en a.

3. **Application.**

   Étudier les extrema éventuels de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + y^2 - 4y - 1$.

Exercice 20.18 (★★)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{k=1}^n x_k^2+\left(1-\sum_{k=1}^n x_k\right)^2.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
2. Montrer que f admet un unique point critique $a=(a_1,\dots,a_n)$. On note $A=\nabla^2 f(a)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer les valeurs propres de A. En déduire que f admet un extremum local en a.
4. Soit $x\in\mathbb{R}^n$, et posons $h=x-a$.
   En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $g:t\mapsto f(a+th)$, montrer que $f(x)\geq f(a)$. En déduire que f possède un extremum global.

Exercice 20.19 (★★★ - QSP HEC 2016)
Soit $p\in\mathbb{N}^*$, E un espace euclidien et $(u_1,\dots,u_p)\in E^p$.

Montrer que la fonction $f:x\mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^p \|x-u_k\|^2$ admet un minimum global sur E et le calculer.

Recherche d'extrema sur un fermé borné

Exercice 20.20 (★★)
Considérons la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y)=xy(1-x-y).$$

On pose $\mathscr{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$ et $\mathscr{D}_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x>0,\ y>0,\ x+y<1\}$.

1. (a) Représenter $\mathscr{D}$.
   (b) Montrer que $\mathscr{D}$ est un fermé borné, et que $\mathscr{D}_0$ est un ouvert.
2. (a) Montrer que f admet un minimum global m et un maximum global M sur $\mathscr{D}$.
   (b) Déterminer les extremum locaux éventuels de f sur $\mathscr{D}_0$.
   (c) Déterminer les valeurs de m et de M, ainsi que les points où ils sont atteints.
3. Mêmes questions pour $g(x,y)=x^2-2y^2-5xy$.

Exercice 20.21 (★★)
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ sur $f(x,y)=\cos(x)\sin(2y)$ dont on souhaite étudier les extrema.

1. Montrer qu'il suffit de rechercher des extrema dans l'ensemble $R=[0,\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]$.
2. Montrer que f admet un maximum global et un minimum global sur R. Les déterminer et préciser les points de R en lesquels ils sont atteints.
3. En déduire les extrema locaux et globaux de f sur $\mathbb{R}^2$ en précisant les points en lesquels ils sont atteints.

Exercice 20.22 (★★)
Soit $\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ et soit f la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par la fonction $f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$.

1. Justifier que f admet un minimum m et un maximum M sur $\mathscr{D}$.
2. Montrer que sur $\mathscr{B}_o(0, 1)$, f n'admet pas de point critique. Que peut-on en déduire quant au maximum et au minimum de f ?
3. En étudiant la fonction $t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$, déterminer les valeurs de m et M.