

Intervalle de confiance

Exercice 21.1 (★)

Soit (X_i) une suite de variables i.i.d. d'espérance μ inconnue et de variance σ^2 connue. Déterminer un intervalle de confiance de μ au niveau de confiance $1 - \alpha$ à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev puis à l'aide du théorème limite central.

Exercice 21.2 (★)

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi normale d'espérance θ inconnue et de variance σ^2 connue. On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Quelle est la loi de \bar{X}_n ?
2. Soit $\alpha \in]0, 1[$, et soit t_α l'unique réel tel que $\Phi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. Montrer que $\left[\bar{X}_n - \frac{t_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{t_\alpha \sigma}{\sqrt{n}} \right]$ est un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Exercice 21.3 (★★)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre p . On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

1. (a) Montrer que \bar{X}_n est un estimateur sans biais et convergent de p .
 (b) Montrer que $\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}$ est un estimateur convergent de $\sqrt{p(1 - p)}$.
2. (a) Déterminer un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0.95 à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
 (b) Lors d'un sondage, on suppose que sur les $n = 2500$ personnes interrogées, 1300 se sont prononcées pour A et 1200 pour son adversaire. Peut-on raisonnablement conclure que le candidat A sera élu ?
3. (a) Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de p au niveau de confiance 0.95 à l'aide du théorème limite central.
 (b) Peut-on maintenant conclure sur l'élection du candidat A ?

Exercice 21.4 (★★)

Soient X_1, \dots, X_n un échantillon de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ inconnu. On pose alors $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$, et on considère $\alpha \in]0, 1[$.

1. Montrer que M_n suit une loi exponentielle dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer deux réels a_n et b_n tels que $P(n\lambda M_n \leq a_n) = \frac{\alpha}{2} = P(n\lambda M_n \geq b_n)$.
3. En déduire que $\left[\frac{nM_n}{b_n}; \frac{nM_n}{a_n} \right]$ est un intervalle de confiance de $\frac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Exercice 21.5 (★★)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables i.i.d. de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ inconnu. On pose $q = 1 - p$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k, \quad Y_n = \frac{1}{\bar{X}_n} \quad \text{et} \quad T_n = \sqrt{n} \frac{p - Y_n}{Y_n \sqrt{1 - Y_n}}.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \sqrt{\frac{q}{1 - Y_n}} \frac{\bar{X}_n - \frac{1}{p}}{\sqrt{\frac{q}{np^2}}}.$$

En déduire un intervalle de confiance asymptotique de p au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Exercice 21.6 (★★)

On suppose que les variables X_1, \dots, X_n sont indépendantes et suivent une loi exponentielle de paramètre λ , et on note $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Montrer que $\left[\frac{n - t_\alpha \sqrt{n}}{S_n}, \frac{n + t_\alpha \sqrt{n}}{S_n} \right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de λ au niveau de risque α .
2. Prenons $\alpha = 0.05$. À l'aide de la méthode de Monte Carlo, écrire une fonction `f=confiance(n, lambda)` qui calcule le niveau de confiance réel de l'intervalle de confiance asymptotique obtenu à la question précédente.

Tester ce programme pour différentes valeurs de n et de λ .

Exercice 21.7 (★★★)

Soit (X_i) une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0, \theta])$, θ inconnu.

On pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Montrer que $\left(n \left(1 - \frac{M_n}{\theta} \right) \right)$ converge en loi vers une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.
 2. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de θ au niveau de risque α , sous la forme $[M_n, U_n]$.
-

Exercice 21.8 (★★★★ - QSP ESCP 2007)

Soient $n \geq 1$ et (X_1, \dots, X_n) un échantillon indépendamment distribué de loi de Poisson de

paramètre $\lambda > 0$ inconnu. On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et $T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$.

En utilisant T_n , déterminer un intervalle de confiance asymptotique de λ au niveau de risque α .
