TD22

# Extrema sous contrainte

## Optimisation sous contrainte non critique

### Exercice 22.1 (★)

Soit $f(x, y) = 2x + y$, et soit $\mathscr{C}$ la contrainte $x^2 + y^2 = 5$.

1. Montrer que $f$ possède un maximum et un minimum global sur $\mathscr{C}$.
2. Déterminer les points critiques de $f$ sous la contrainte $\mathscr{C}$.
3. Conclure.

---

### Exercice 22.2 (★)

Déterminer les extrema de la fonction $f$ définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$ par $f(x, y, z) = x + y + z$ sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

---

### Exercice 22.3 (★★)

On souhaite minimiser la surface d'une boite rectangulaire dont le volume doit être égal à $8\,\mathrm{dm}^3$. Autrement dit, cela revient à déterminer le minimum de la fonction $f(x, y, z) = 2(xy + yz + zx)$ sur $\mathbb{R}_+^*)^3$ sous la contrainte $\mathscr{C} : xyz = 8$.

1. Montrer que la contrainte $\mathscr{C}$ est non critique.
2. Montrer que $f$ admet un unique point critique $a_0$ sous la contrainte $\mathscr{C}$.
3. Montrer que
$$\forall (a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3,\ \frac{1}{3}\left(\ln(a) + \ln(b) + \ln(c)\right) \leq \ln\left(\frac{a + b + c}{3}\right).$$
4. En appliquant l'inégalité précédente à $a = xy, b = yz, c = xz$, conclure quant à la nature de $a_0$.

---

### Exercice 22.4 (★★)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = xy$.

1. Déterminer les points critiques de $f$ sous la contrainte $\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 4y^2 = 8\}$.
2. Montrer que $\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 4y^2 = 8\}$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $f$ admet un maximum et un minimum sur $\mathscr{D}$ et les déterminer.
4. La fonction $f$ admet-elle un maximum et un minimum sur $\mathscr{D}' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 4y^2 \leq 8\}$ ? Si oui, que valent-ils ?

---

### Exercice 22.5 (★★)

Soit $\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 2\}$, et soit $f$ la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par :
$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

1. Montrer que $f$ admet sur $\mathscr{D}$ un minimum $m$ et un maximum $M$.

2. Déterminer l'ensemble des points critiques de $f$ sur l'ouvert $\mathscr{D}' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 < 2\}$.

3. Déterminer les points critiques de $f$ sous la contrainte $\mathscr{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 = 2\}$.

4. Déterminer $m$ et $M$.

---

### Exercice 22.6 (★★ - ✍)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, et soit $q_A$ la forme quadratique associée. On rappelle que $q_A(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_ix_j$.

On note $\mathscr{S} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|^2 = 1\}$.

1. Montrer que $q_A$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, et calculer ses dérivées partielles.

   Montrer en particulier que ${}^t(\nabla q_A(x_1,\dots,x_n)) = 2A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

2. Justifier que $q_A$ admet un maximum $M$ et un minimum $m$ sur $\mathscr{S}$.

3. Prouver que la contrainte $\mathscr{S}$ est non critique.

4. Montrer que $q_A(x_1,\dots,x_n) = M$ si et seulement si $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $M$.

5. En déduire que $M$ (resp. $m$) est la plus grande (resp. la plus petite) valeur propre de $A$, et que pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$m\|(x_1,\dots,x_n)\|^2 \leq q_A(x_1,\dots,x_n) \leq M\|(x_1,\dots,x_n)\|^2.$$

---

### Exercice 22.7 (★★★ - Oral ESCP 2015)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_1,\dots,a_n$ des réels non tous nuls. On considère les fonctions $f$, $g$ et $h$ définies sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1,\dots,x_n) = \prod_{k=1}^{n} x_k^2, \quad g(x_1,\dots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \quad \text{et} \quad h(x_1,\dots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_kx_k.$$

1. (a) Justifier que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Déterminer son gradient en tout point.

   (b) Prouver que $f$ admet un maximum sur la sphère unité $S$ de $\mathbb{R}^n$ définie par $S = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n :\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1\right\}$.

   (c) Déterminer le maximum de $f$ sur $S$.

   (d) En déduire que pour tout point $u = (u_1,\dots,u_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a $\left|\displaystyle\prod_{k=1}^{n} u_k\right| \leq \left(\dfrac{\|u\|}{\sqrt{n}}\right)^n$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme usuelle de $\mathbb{R}^n$.

2. (a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $a_i \neq 0$. On pose :

$$H = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n :\ h(x_1,\dots,x_n) = 1\} \quad \text{et} \quad B = \left\{x \in \mathbb{R}^n :\ \|x\| \leq \frac{1}{|a_i|}\right\}.$$

   Prouver que l'ensemble $H \cap B$ est non vide, puis qu'il est fermé borné.

(b) Justifier que la fonction $g$ admet un minimum sur $H \cap B$. Prouver que ce minimum est aussi le minimum de $g$ sous la contrainte $h(x_1, \ldots, x_n) = 1$.

(c) Déterminer le minimum de $g$ sur $H$.

---

# Optimisation sous contrainte linéaire

### Exercice 22.8 (★)

1. Montrer que la fonction $f(x, y, z) = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$ admet un unique point critique $a$ sous la contrainte $x + y + z = 3$.

2. À l'aide de la formule de Taylor à l'ordre 2, déterminer la nature locale de $a$.

3. $a$ est-il un extremum global ?

---

### Exercice 22.9 (★)

Soit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$, et soit $\mathscr{C}$ la contrainte $2x - y + z = 3$.

1. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$, puis calculer son gradient et sa hessienne en tout point de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que $f$ admet un unique point critique $a$ sous la contrainte $\mathscr{C}$.

3. Déterminer la nature local du point critique $a$ de $f$ sous $\mathscr{C}$.

4. On cherche à montrer que $a$ est en fait un extremum global. Pour cela on considère $x \in \mathscr{C}$, et on note $h = x - a$ et $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(t) = f(a + th)$.

   Étudier les variations de $g$, puis conclure.

---

### Exercice 22.10 (★★)

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, et soit $\mathscr{C}$ la contrainte définie par les équations $\begin{cases} x + y = 2 \\ z + t = 0 \end{cases}$.

1. Déterminer l'ensemble des points critiques de $f$ sous la contrainte $\mathscr{C}$.

2. Déterminer la nature de ces points critiques.

---

### Exercice 22.11 (★★ - D'après Edhec 2001)

Soit $n \geq 2$. Soit $f : ]0, 1[^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (1 - x_i)^n$.

Déterminer les extrema locaux de $f$ sous la contrainte $\mathscr{C} : x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$.

---

### Exercice 22.12 (★★)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = xy + yz + xz$, et soit $\mathscr{C}$ la contrainte définie par $x + y + z = 2$. On note $\mathscr{H}$ l'ensemble des solutions de $x + y + z = 0$.

Le but de l'exercice est de déterminer les extrema locaux de $f$ sous la contrainte $\mathscr{C}$.

1. Montrer que $f$ admet un unique point critique $a_0$ sous la contrainte $\mathscr{C}$.

2. Montrer qu'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vérifiant $\varepsilon(0) = 0$ et continue en 0 telle que :

$$\forall h \in \mathscr{H}, \quad f(a_0 + h) = f(a_0) + \frac{1}{2} q_{a_0}(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h).$$

3. Déterminer les valeurs propres de $A = \nabla^2 f(a_0)$. Que dire du le signe de $q_{a_0}$ sur $\mathscr{H}$ ?

4. Montrer que $E_{-1}(A) = \mathscr{H}$.

5. En déduire que pour tout $h \in \mathscr{H}$ non nul, $q_{a_0}(h) < 0$. Quelle est la nature locale du point critique $a_0$ ?

---

**Exercice 22.13 (★★ - D'après Ecricome 2008)**
On considère la fonction $f$ définie sur $]0,+\infty[^3$ par $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{1}{4x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{9x_3}$.

1. Justifier que $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[^3$. Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

2. On note $\nabla^2(f)(A) = \left[\partial^2_{i,j}(f)(A)\right]_{1\leq i,j\leq 3}$ la matrice hessienne de $f$ en $A = (a_1,a_2,a_3)$.
Justifier que, pour tout $A \in ]0,+\infty[^3$, pour toute matrice colonne $H$ à trois lignes, non nulle, on a :
$$^tH\nabla^2(f)(A)H > 0.$$

3. $f$ admet-elle des extrema sur $]0,+\infty[^3$ ?

4. On cherche désormais les extrema de $f$ sous la contrainte $x_1+x_2+x_3 = 110$.
   (a) Montrer que $f$ admet un unique point critique $a$ sous cette contrainte, que l'on déterminera.
   (b) On souhaite montrer que $a$ est un extremum global de $f$ sous la contrainte $\mathscr{H}$. Pour cela on considère $x \in \mathscr{C}$ et on note alors $h = x - a$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(t) = f(a+th)$.
   En appliquant la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral à la fonction $g$, montrer que $f(x) \geq f(a)$. Conclure.

---